p185 n°83 $\quad f(x) = x - \frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

A] 1) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - \frac{1}{4}\left(e^{-x} - (x+1)e^{-x}\right) = 1 + \frac{1}{4} x\, x e^{-x}$ (de même f' est...)

$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \frac{1}{4}(1-x)e^{-x}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{4} > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc f'' est du signe de $1-x$ soit négatif sur $[1;+\infty[$, positif sinon.

On en déduit que f' est croissante sur $]-\infty;1[$ et décroissante sur $]1;+\infty[$.

c) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty\end{array}\right\}$ par composée $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty\end{array}\right\}$ par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}/x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 1$

et $f'(1) = 1 + \frac{1}{4e} > 0$

f' est croissante strictement sur $]-\infty;1[$ et continue (car dérivable) donc (TVI) $f'(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-\infty;1[$.

$f'(1) > 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 1$ donc, comme f' est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ et continue, $f'(x) > 1\ \forall x > 1$, donc $f'(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]1;+\infty[$.

$\Rightarrow f'(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, α.

$-2 \leq \alpha \leq -1$, puis $-1{,}3 \leq \alpha \leq -1{,}2$, puis $-1{,}21 \leq \alpha \leq -1{,}2$

(menu TABLE)

2) a) D'après les variations de f' on en déduit le tableau de signes de f' puis le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe f'		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(x) = \left(xe^{x} - \frac{1}{4}(x+1)\right)e^{-x}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty\end{array}\right\}$ composée $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{4}(x+1) = +\infty\end{array}\right\}$ somme $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{x} - \frac{1}{4}(x+1)\right) = +\infty$

BILAN (produit) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{4}xe^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{4}xe^{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{4}e^{-x} = 0$

par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) $f(x) - x = -\frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$ et d'après ce qui précède $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$ d'où Δ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-\frac{1}{4} < 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $f(x) - x$ est du signe opposé de $x+1$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ sur $]-\infty;-1[$ et en dessous de Δ sur $]-1;+\infty[$.

B] $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Conjecturons : $(u_n)_n$ semble décroissante, et semble converger vers -1.

2) a) Posons P_n : $-1 < u_n < 0$ $\qquad$ Initialisation : $u_1 = u_0 - \frac{1}{4}(u_0+1)e^{-u_0} = 0 - \frac{1}{4} \times 1 \times e^{0} = -\frac{1}{4}$

donc $-1 < u_1 < 0$ $\quad P_1$ est vraie.

Hérédité : supposons P_n vraie pour un certain rang n. f est strictement croissante sur $[-1;0]$ (car $\alpha < -1$), et on a $f(-1) = -1 - \frac{1}{4} \times 0 = -1$ et $f(0) = 0 - \frac{1}{4} \times 1 \times e^{0} = -\frac{1}{4}$ donc $f(]-1;0[) =]-1;-\frac{1}{4}[\subset]-1;0[$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, on en déduit P_{n+1}.

Conclusion : P_1 vraie et P_n vraie $\Rightarrow P_{n+1}$ vraie donc $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n est vraie.

b) Posons P_n : $u_{n+1} < u_n$ $\qquad$ initialisation : $u_1 = -\frac{1}{4} < 0 = u_0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons P_n vraie pour un certain rang n. f est strictement croissante donc $u_{n+1} < u_n \Rightarrow u_{n+2} < u_{n+1}$.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n vraie $\Rightarrow P_{n+1}$ vraie donc $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie et $(u_n)_n$ est donc décroissante.

$(u_n)_n$ est décroissante et minorée par -1. Par théorème, elle est donc convergente. On note l sa limite.

3) a) On a montré que $\forall n \geq 1$, $u_n > -1 \Leftrightarrow \forall n \geq 0\ u_{n+1} + 1 > 0$.

Par ailleurs pour tout $n \geq 0$: $u_{n+1} + 1 = f(u_n) + 1 = (u_n+1)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-u_n}\right)$

encadrons le deuxième facteur : pour tout n $\quad -1 < u_n < 0 \Leftrightarrow 1 > -u_n > 0 \overset{e\nearrow}{\Leftrightarrow} e > e^{-u_n} > 1$

$\Leftrightarrow -\frac{e}{4} < -\frac{1}{4}e^{-u_n} < -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 - \frac{e}{4} < 1 - \frac{1}{4}e^{-u_n} < \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - \frac{1}{4}e^{-u_n} < \frac{3}{4}$

D'où $u_{n+1} + 1 < \frac{3}{4}(u_n + 1)\ \forall n \geq 0$.

b) Posons P_n : $0 \leq u_n + 1 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n}$ $\qquad$ Initialisation : $0 \leq u_0 + 1 = 0 + 1 = 1 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{0} = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons P_n vraie. Alors d'après 3)a) : $0 < u_{n+1} + 1 < \frac{3}{4}(u_n + 1) \underset{(HR)}{\leq} \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

Conclusion : P_0 est vraie et P_n vraie $\Rightarrow P_{n+1}$ vraie d'où $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < u_n + 1 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n}$

or $0 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n} = 0$ donc par théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + 1) = 0$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$