On pose P_n : $v_n - u_n \geqslant 0$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(v_n - u_n)$

<u>initialisation</u> $v_0 - u_0 = 2-1 \geqslant 0$ et $v_{0+1} - u_{0+1} = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{6} \leqslant \frac{1}{4}(2-1) = \frac{1}{4}(v_0 - u_0)$ <u>ok</u> P_0 est vraie.

<u>hérédité</u> On suppose P_n vraie pour un certain rang n.

Alors $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$ Alors $\begin{cases} 1 \leqslant v_n \leqslant 2 \text{ donc } 2 \leqslant v_n+1 \leqslant 3 \\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2 \text{ donc } 2 \leqslant u_n+1 \leqslant 3 \end{cases}$ donc $v_n - u_n \geqslant 0$ $\Rightarrow v_{n+1} - u_{n+1} \geqslant 0$

de plus $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{v_n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{u_n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ (inverse de nombres positifs) Donc $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

d'où P_{n+1} est vraie.

(Rmq : rigoureusement ce serait au rang suivant qu'il aurait fallu démontrer ceci mais le décalage permet une meilleure lisibilité)

<u>Conclusion</u> P_0 vraie et $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ donc P_n vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Toujours par récurrence : P_n : $v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$ <u>initialisation :</u> $v_0 - u_0 = 1 \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$ P_0 vraie.

<u>hérédité</u> Supposons P_n vraie, pour un certain rang n alors $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(v_n - u_n) \underset{HR}{\leqslant} \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

donc P_{n+1} est vraie.

<u>Conclusion</u> P_0 vraie et P_n vraie $\Rightarrow P_{n+1}$ vraie donc $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n est vraie.

c) On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et comme $0 < \frac{1}{4} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc par théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty}(v_n - u_n) = 0$. De plus en 2/b) on a montré que $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ décroissante. $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont donc adjacentes. Par théorème du cours, elles sont donc convergentes, et convergent vers la même limite α. Comme elles sont définies par récurrence, α vérifie $\alpha = f(\alpha) \Leftrightarrow \frac{2\alpha+1}{\alpha+1} = \alpha$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \underset{\Delta=5}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n et $v_n \in [1;2]$ on obtient $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or)

<u>p 185 n° 78 =</u> $0 < a < b$ $(u_n)_n$: $u_0 = a$ et $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases}$ $(v_n)_n$: $v_0 = b$ et $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$

1) P_n : $u_n > 0$ et $v_n > 0$ <u>initialisation</u> $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$ donc P_0 est vraie.

<u>hérédité</u> On suppose que pour un certain rang n $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Alors $u_n \times v_n > 0$ donc $u_{n+1} > 0$ <u>et</u> $u_n + v_n > 0$ donc $v_{n+1} > 0$. P_{n+1} est donc vraie.

<u>Conclusion</u> P_0 est vraie et P_n vraie $\Rightarrow P_{n+1}$ vraie donc $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

2) pour tout n : $u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2 = u_n v_n - \frac{(u_n+v_n)^2}{4} = u_n v_n - \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2}{4} = -\frac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{4}$

(carrés pour éviter racine) $= -\frac{(u_n - v_n)^2}{4}$ soit pour tout n, $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow v_{n+1}^2 > u_{n+1}^2$

$\underset{\text{positifs}}{\overset{\text{nbs}}{\Leftrightarrow}} v_{n+1} > u_{n+1}$ cqfd.

3) a) Pour tout n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \frac{u_n - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n} + v_n}{2} = \frac{(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2}{2} \overset{(*)}{\leqslant} \frac{(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n})(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})}{2}$

or $\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} \leqslant \sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}$ (*) $\Rightarrow$ Pour tout n, $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2}$ cqfd

b) P_n : $v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(b-a)$

<u>initialisation :</u> $v_0 - a_0 = b-a \leqslant \frac{1}{2^0}(b-a) = b-a$ <u>ok</u> P_0 est vraie.

<u>hérédité :</u> Supposons que pour un certain n $v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(b-a)$ alors $v_{n+1} - u_{n+1} \overset{a)}{\leqslant} \frac{1}{2}(v_n - u_n) \underset{HR}{\leqslant} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}(b-a)$ $\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$

donc P_{n+1} est vraie.

<u>Conclusion :</u> P_0 est vraie et P_n vraie implique P_{n+1} vraie donc pour tout n, P_n est vraie. cqfd.

4) Pour tout n : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})$ or $u_n > 0$ et $v_n \geqslant u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_n$ est croissante.

Pour tout n : $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0$ car $u_n \leqslant v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ donc $(v_n)_n$ est décroissante.

De plus on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(b-a)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n}(b-a) = 0$ car $2 > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

Donc par théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty}(v_n - u_n) = 0$

Des trois conclusions précédentes, on déduit que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

5) Deux suites adjacentes convergent vers la même limite, notons-la ℓ.

on cherche n tel que $\frac{1}{2^n}(5-2) = \frac{3}{2^n} < 10^{-3} \Leftrightarrow 3000 < 2^n \Leftrightarrow 3000 < e^{n \ln 2}$

$\overset{\ln \nearrow}{\Leftrightarrow} n \ln 2 > \ln 3000$ d'où $n > \frac{\ln 3000}{\ln 2} \simeq 11{,}55$ d'où $n = 12$.

Avec un tableur on obtient :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	3	3,873	3,936	3,936	3,936	3,936	3,936	3,936	3,936	3,936	3,936	3,936	3,936
v_n	5	4	3,936	3,936	3,936	3,936	3,936	3,936	3,936	3,936	3,936	3,936	3,936

$\ell \simeq 3{,}936$.