p182 n°60 : $u_n = \dfrac{2n}{(n^2+1)\,2^n}$ $\quad v_n = \dfrac{2n^2}{n^2+1}$

1- $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{2(n^2+1)-2}{n^2+1} = 2 - \dfrac{2}{n^2+1}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ $n^2+1 \geq 1$ donc $0 < \dfrac{1}{n^2+1} \leq 1$ d'où $-2 \leq \dfrac{-2}{n^2+1} < 0$

soit $0 \leq 2 - \dfrac{2}{n^2+1} < 2$ soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n < 2$, $(v_n)_n$ est bornée.

2- $u_n = v_n \times \dfrac{1}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ $\quad$ or $2 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{n-1} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$ et par théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

p182 n°62 :

$\forall n \geq 1$, $n^2+n > n^2+(n-1) > \dots > n^2+2 > n^2+1 > n^2$ d'où $\forall n \geq 1$, $\dfrac{1}{n^2+n} < \dots < \dfrac{1}{n^2+2} < \dfrac{1}{n^2+1} < \dfrac{1}{n^2}$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \underbrace{\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+2} + \dots + \dfrac{1}{n^2+n}}_{n \text{ termes}} < \underbrace{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2}}_{n \text{ termes}} = n \times \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < \dfrac{1}{n}$

de plus u_n est une somme de n termes positifs, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \dfrac{1}{n}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et par théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

p183 n°68 : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{2}$

1) $u_0 = 1$ $\quad u_1 = \dfrac{1-1}{2} = 0$ $\quad u_2 = \dfrac{0-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ $\quad u_3 = \dfrac{-\frac{1}{2}-1}{2} = -\dfrac{3}{4}$ $\quad u_4 = \dfrac{-\frac{3}{4}-1}{2} = -\dfrac{7}{8}$ $\quad u_5 = \dfrac{-\frac{7}{8}-1}{2} = -\dfrac{15}{16}$

2) $\alpha \in \mathbb{R}$. $v_n = u_n - \alpha$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = \dfrac{u_n - 1}{2} - \alpha = \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{1}{2} - \alpha = \dfrac{1}{2}(u_n - 1 - 2\alpha)$

Résolvons $-\alpha = -1 - 2\alpha \iff \alpha = -1$ $\quad$ Donc $\alpha = -1 \iff (v_n)_n$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - (-1) = 1+1 = 2$

b) Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et $v_n = u_n + 1 \iff u_n = v_n - 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$

c) $n \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une suite décroissante, et convergente vers 0 $(0<q<1)$

Comme $x \mapsto 2x - 1$ est croissante et continue on en déduit que $(u_n)_n$ est décroissante et converge vers $f(0) = -1$ (par composée).

d) On cherche n tel que $|u_n - (-1)| < 10^{-4}$ soit $|v_n| < 10^{-4} \iff 2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-4}$

$\iff e^{n \ln(1/2)} < \dfrac{10^{-4}}{2} \underset{\ln \nearrow}{\iff} n \ln(1/2) < \ln\left(\dfrac{10^{-4}}{2}\right) \underset{\ln(\frac{1}{2})<0}{\overset{1/2<1}{\iff}} n > \dfrac{\ln(10^{-4}/2)}{\ln(1/2)} \simeq 14{,}29$ $\quad$ soit $n = 15$ est le premier entier cherché

p183 n°69 : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{3}$ et $v_n = u_n - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = 2u_n - \frac{1}{3} - \alpha = 2\left(u_n - \frac{1}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)$ $\quad$ Résolvons $-\alpha = -\frac{1}{6} - \frac{\alpha}{2} \iff \frac{1}{6} = \frac{\alpha}{2} \iff \alpha = \frac{1}{3}$

donc $\alpha = \frac{1}{3} \iff (v_n)_n$ est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 - \alpha = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

2) $(v_n)_n$ suite géométrique de raison $q = 2 > 1$, donc $(v_n)_n$ diverge.

3) Ceci implique $v_n = \frac{5}{3} \times 2^n$ et $S_n = \dfrac{5}{3} \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k = \dfrac{5}{3}\,\dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} = \dfrac{5}{3}(2^{n+1} - 1)$

4) $u_n = v_n + \alpha = v_n + \frac{1}{3}$ pour tout n d'où $S_n = \frac{5}{3}(2^{n+1} - 1) + \frac{1}{3}(n+1)$

p184 n°77 : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$ sur $[0;2]$.

1) f, fonction rationnelle, ~~et~~ dérivable sur $[0;2]$ $(x+1 \neq 0)$. $\quad \forall x \in [0;2]$, $f'(x) = \dfrac{2(x+1) - (2x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$

donc f est strictement croissante. $\quad f(1) = \frac{3}{2}$ et $f(2) = \frac{5}{3}$ $\quad$ donc par continuité et monotonie $f([1;2]) = [\frac{3}{2};\frac{5}{3}] \subset [1;2]$.

2) a) $(u_n)_n$ semble croissante $\quad (v_n)_n$ semble décroissante $\quad (u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent apparemment vers 1 même limite

b)

	$P_n : 1 \leq u_n \leq 2$	$Q_n : u_n \leq u_{n+1}$	$R_n : 1 \leq v_n \leq 2$	$S_n : v_{n+1} \leq v_n$
Initialis°	$1 \leq u_0 = 1 \leq 2$ donc P_0 vraie	$1 = u_0 \leq u_1 = \frac{3}{2}$ donc Q_0 est vraie	$1 \leq v_0 = 2 \leq 2$ donc R_0 vraie	$\frac{5}{3} = v_1 \leq v_0 = 2$ donc S_n vraie.
Hérédité	on suppose $1 \leq u_n \leq 2$ pour un certain rang n $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f([1;2]) \subset [1;2]$ donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ cqfd.	on suppose $u_n \leq u_{n+1}$ pour un certain rang n f est croissante et $u_{n+1} = f(u_n)$ donc $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ cqfd.	on suppose $1 \leq v_n \leq 2$ pour un certain rang n $v_{n+1} = f(v_n)$ et $f([1;2]) \subset [1;2]$ donc $1 \leq v_{n+1} \leq 2$ cqfd	on suppose $v_{n+1} \leq v_n$ pour un certain rang n. f est croissante et $v_{n+1} = f(v_n)$ donc $v_{n+2} \leq v_{n+1}$ cqfd
Conclusion	P_0 vraie et $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ $\Rightarrow \forall n$, P_n vraie	(similaire)	(")	(")

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{2v_n+1}{v_n+1} - \dfrac{2u_n+1}{u_n+1} = \dfrac{(2v_n+1)(u_n+1) - (2u_n+1)(v_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)} = \dfrac{v_n - u_n}{(u_n+1)(v_n+1)}$