p177 n°13 :

a) $u_n = \frac{5n^2-3n+7}{n^2+n+1} = f(n)$ avec $f(x) = \frac{5x^2-3x+7}{x^2+x+1}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2}{x^2} = 5$ d'où $\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} u_n = 5$

b) $u_n = \frac{-3n^2+2n+4}{2(n+1)^2} = f(n)$ avec $f(x) = \frac{-3x^2+2x+4}{2(x+1)^2}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2}{2x^2} = -\frac{3}{2}$ d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{3}{2}$

p178 n°22 :

a) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}} = n\left(\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}}\right) = n\,\frac{(n+2)-(n+1)}{\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)} = \frac{n}{(\sqrt{n})^3\sqrt{1+\frac{2}{n}}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(\sqrt{n})^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ car $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right) = 1$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{2}{n}} = 1$

Soit au final $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\sqrt{1+\frac{2}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)} = \frac{1}{2}$

Par produit on déduit $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

b) $u_n = \frac{3n - \sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}} = \frac{9n^2 - (9n^2+1)}{\sqrt{n^2+5}\left(3n+\sqrt{9n^2+1}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{n^2+5}\left(3n+\sqrt{9n^2+1}\right)}$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to+\infty} n^2+5 = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty\end{array}\right\}$ Composée : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+5} = +\infty$ de même $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{9n^2+1} = +\infty$

Donc par somme et produit $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+5}\left(3n+\sqrt{9n^2+1}\right) = +\infty$

D'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

p178 n°24 :

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ avec $f(x) = \frac{3x^2-4}{x+1}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{x\to+\infty} g(x)$ avec $g(x) = \frac{3x^2-4}{x(x+1)}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$

$w_n = u_n - 3n = \frac{3n^2-4}{n+1} - 3n$

$= \frac{-3n-4}{n+1}$

même méthode, $\lim_{n\to+\infty} w_n = -3$

p179 n°43 :

pour tout $n \neq 0$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{2n(n) + (2n+1)n - (2n+1)2n}{n(2n)(2n+1)} = \frac{-n}{n \times 2n(2n+1)} = \frac{-1}{2n(2n+1)} < 0$ car $n > 0$

On en déduit que $(u_n)_n$ est strictement décroissante.

pour tout $n \neq 0$: $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{(2n+1)(n+1) + (2n+2)(n+1) - (2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} = \frac{2n^2+3n+1+2n^2+4n+2-4n^2-6n-2}{(2n+2)(2n+1)(n+1)}$

$= \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$ car $n > 0$.

On en déduit que $(v_n)_n$ est strictement croissante.

pour tout $n \neq 0$, $v_n - u_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n}$ et $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

Ces trois conclusions impliquent que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

p182 n°57 :

A] $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ sur $]1;+\infty[$.

1) a) f est dérivable sur $]1;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]1;+\infty[$.

$\forall x > 1$: $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ $\ln x > 1$ ssi $x > e$

$f(e) = \frac{e}{\ln e} = \frac{e}{1} = e$

x	1		e		$+\infty$
Signe de f'		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

b) $\lim_{x\to1^+} \ln x = 0^+$ donc $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ (inverse)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ donc (inverse) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) $f(e) = e$ et f strictement croissante sur $]e;+\infty[$ donc $\forall x > e$, $f(x) > f(e) = e$

B] $(u_n)_n$: $u_0 = a > e$, et $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) P_n : $u_n > e$.   initialisation $u_0 = a > e$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons pour un certain rang n, $u_n > e$ alors $u_{n+1} = f(u_n) > e$ d'après A]2) donc P_{n+1} vraie.

Conclusion : P_0 vraie et P_n vraie $\Rightarrow P_{n+1}$ vraie donc $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

2) $\forall n$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{\ln u_n} \times \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ln u_n} < 1$ car $\ln u_n > 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ car $u_n > e$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc $(u_n)_n$ est strictement décroissante.

3) Suite décroissante et minorée par e, donc $(u_n)_n$ converge. Soit l sa limite. $(u_n)_n$ est définie par récurrence, donc l est telle que $l = f(l) \iff \frac{l}{\ln l} = l \iff \ln l = 1 \iff l = e$.