Probabilités – Loi exponentielle

Exercices corrigés

Sont abordés dans cette fiche : *(cliquez sur l'exercice pour un accès direct)*

Remarque préalable : Les lois exponentielles sont souvent utilisées pour modéliser des temps d'attente ou des durées de vie.

www.sos-devoirs-corriges.com

© SOS DEVOIRS CORRIGES (marque déposée)

Exercice 1 *(1 question)* *Niveau : moyen*

Soit λ un réel non nul et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

A quelle(s) condition(s) sur λ la fonction f est-elle une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$?

Correction de l'exercice 1

↻ *Retour au menu*

Rappel : Densité de probabilité

Soit I un intervalle. On appelle densité de probabilité sur I toute fonction continue et positive sur I telle que :

$$\int_I f(x)dx = 1$$

Remarque : Pour tous réels a et b tels que $a \leq b$, on a :

- ✓ Si $I = (a\,;b)$, alors $\displaystyle\int_I f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
- ✓ Si $I = [a\,;+\infty[$, alors $\displaystyle\int_I f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$
- ✓ Si $I =]-\infty\,;b]$, alors $\displaystyle\int_I f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$

L'intervalle $(a\,;b)$ se note indifféremment : $[a\,;b]$, $[a\,;b[$, $]a\,;b]$ ou $]a\,;b[$.

1) Etudions tout d'abord la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

f est le produit du réel non nul λ par la composée de la fonction $x \mapsto -\lambda x$ par la fonction $x \mapsto e^x$.

Or, $x \mapsto -\lambda x$ est une fonction linéaire, continue sur $\mathbb{R}$, et $x \mapsto e^x$ est la fonction exponentielle, également continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ pour tout réel non nul λ.

2) Etudions désormais la positivité de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $e^{-\lambda x} > 0$. Ainsi, f est positive si et seulement si $\lambda > 0$.

3) Etudions enfin $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f(x)dx$

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-\lambda x}dx = \lambda\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^t = -\lim_{t\to+\infty}\left[e^{-\lambda x}\right]_0^t$$

$$= -\lim_{t\to+\infty}\left(e^{-\lambda t} - e^0\right) = -\lim_{t\to+\infty}\left(e^{-\lambda t} - 1\right) = -\lim_{t\to+\infty}\left(e^{-\lambda t}\right) + 1 = 1 - \lim_{t\to+\infty}\left(e^{-\lambda t}\right)$$

© SOS DEVOIRS CORRIGES (marque déposée)

www.sos-devoirs-corriges.com

Or, $\lim_{t \to +\infty} (-\lambda t) = -\infty$ et $\lim_{T \to -\infty} (e^T) = 0^+$.

Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \left(e^{-\lambda t}\right) = \lim_{T \to -\infty} (e^T) = 0^+.$$

Il s'ensuit que $1 - \lim_{t \to +\infty} \left(e^{-\lambda t}\right) = 1$, c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(x)dx = 1$$

Rappel : Limite de la composée de deux fonctions

a, b et c désignent des réels, $-\infty$ ou $+\infty$. f et g sont deux fonctions.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et si $\lim_{X \to b} g(X) = c$, alors on a :

$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lim_{X \to b} g(X) = c$.

4) Concluons.

De ces 3 résultats, il découle que ***f* est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\boldsymbol{\lambda} > 0$**.

www.sos-devoirs-corriges.com

© SOS DEVOIRS CORRIGES (marque déposée)

Exercice 2 *(1 question)* — *Niveau : facile*

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,2 sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Déterminer la fonction densité de probabilité.

Correction de l'exercice 2

↻ *Retour au menu*

Rappel : Loi exponentielle sur $[0\,;\,+\infty[$

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$) sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ si sa densité de probabilité est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Remarque importante : Une loi exponentielle de paramètre λ est également appelée loi de durée de vie sans vieillissement.

La variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle de paramètre 0,2 sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Ainsi, **la fonction f densité de probabilité est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 0,2e^{-0,2x}$.**

www.sos-devoirs-corriges.com

© SOS DEVOIRS CORRIGES (marque déposée)

Exercice 3 *(3 questions)* *Niveau : facile*

La durée de vie d'un composant est une variable aléatoire T, exprimée en jours, qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,004.

1) Quelle est la probabilité que la durée de vie du composant excède trois cents jours ?
2) Quelle est la probabilité que la durée de vie du composant soit d'au plus une année ?
3) Quelle est la probabilité que la durée de vie du composant soit comprise entre deux et trois ans ?

Correction de l'exercice 3

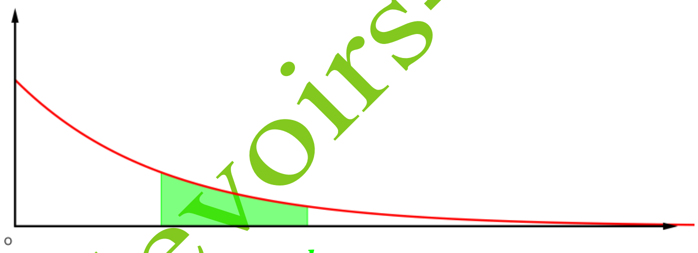
↻ *Retour au menu*

Rappel : Probabilité d'un événement avec une loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ sur $[0\,;+\infty[$.

Pour tout intervalle $(a\,;\,b) \subset [0\,;+\infty[$, on a :

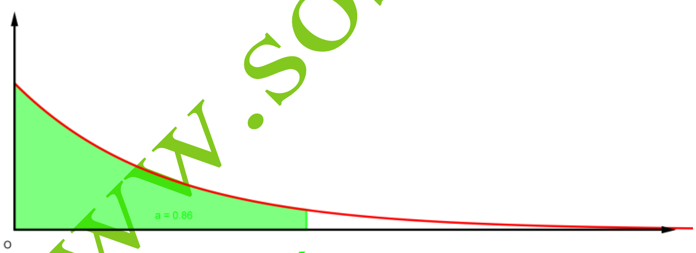
$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

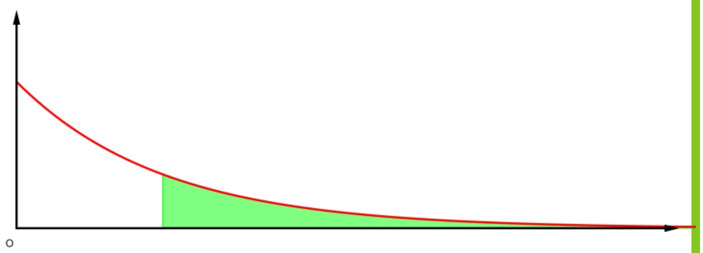


Et, en particulier,

$$p(X \leq b) = \int_0^b \lambda e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda b}$$

$$p(X \geq a) = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t \lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda a}$$





www.sos-devoirs-corriges.com

La variable aléatoire T, exprimée en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,004. La densité de probabilité est donc la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 0{,}004e^{-0{,}004x}$.

1) Calculons la probabilité que la durée de vie du composant excède trois cents jours.

Méthode 1 : application directe de la formule

$p(T > 300) = e^{-0{,}004\times300} \approx \mathbf{0{,}301}$ (**arrondi à 10^{-3} près**)

© SOS DEVOIRS CORRIGES (marque déposée)

Méthode 2 : calcul d'intégrale

$$p(T > 300) = \lim_{t\to+\infty} \int_{300}^{t} 0{,}004e^{-0{,}004x}dx = \lim_{t\to+\infty} [-e^{-0{,}004x}]_{300}^{t} = \lim_{t\to+\infty} \left(-e^{-0{,}004t} - (-e^{-0{,}004\times300})\right)$$

$$= \lim_{t\to+\infty} (-e^{-0{,}004t} + e^{-0{,}004\times300}) = \lim_{t\to+\infty} (-e^{-0{,}004t}) + e^{-0{,}004\times300}$$

Or, $\lim_{t\to+\infty} (-0{,}004t) = -\infty$ et $\lim_{T\to-\infty} (e^{T}) = 0^{+}$. Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim_{t\to+\infty} (e^{-0{,}004t}) = \lim_{T\to-\infty} (e^{T}) = 0^{+}$. Il vient alors que $\lim_{t\to+\infty} (-e^{-0{,}004t}) = 0^{-}$.

Par conséquent, $p(T > 300) = e^{-0{,}004\times300} \approx \mathbf{0,301}$ $(\boldsymbol{arrondi}$ à $\mathbf{10^{-3}}$ $\boldsymbol{près})$

Méthode 3 : probabilité d'un événement contraire

L'événement $(T > 300)$ est l'événement contraire de l'événement $(T \leq 300)$. Par conséquent, il vient que :

$$p(T > 300) = 1 - p(T \leq 300) = 1 - p(0 \leq T \leq 300) = 1 - \int_{0}^{300} 0{,}004e^{-0{,}004x}dx = 1 - [-e^{-0{,}004x}]_{0}^{300}$$

$$= 1 - \left(-e^{-0{,}004\times300} - (-e^{-0{,}004\times0})\right) = 1 - (-e^{-0{,}004\times300} + 1) = e^{-0{,}004\times300}$$

$\approx \mathbf{0,301}$ $(\boldsymbol{arrondi}$ à $\mathbf{10^{-3}}$ $\boldsymbol{près})$

2) Calculons la probabilité que la durée de vie du composant soit d'au plus une année.

Méthode 1 : application directe de la formule

$$p\left(T \leq \underbrace{365}_{1\ an}\right) = 1 - e^{-0{,}004\times365} \approx \mathbf{0,768}\ (\boldsymbol{arrondi}\text{ à }\mathbf{10^{-3}}\ \boldsymbol{près})$$

Méthode 2 : calcul d'intégrale

$$p\left(T \leq \underbrace{365}_{1\ an}\right) = \int_{0}^{365} 0{,}004e^{-0{,}004x}dx = [-e^{-0{,}004x}]_{0}^{365} = -e^{-0{,}004\times365} - (-e^{-0{,}004\times0}) = -e^{-0{,}004\times365} + 1$$

$\approx \mathbf{0,768}$ $(\boldsymbol{arrondi}$ à $\mathbf{10^{-3}}$ $\boldsymbol{près})$

3) Calculons la probabilité que la durée de vie du composant soit comprise entre deux et trois ans.

Méthode 1 : application directe de la formule

$$p\left(\underbrace{730}_{2\ ans} \leq X \leq \underbrace{1\,095}_{3\ ans}\right) = e^{-0{,}004\times730} - e^{-0{,}004\times1\,095} \approx \mathbf{0,041}\ (\boldsymbol{arrondi}\text{ à }\mathbf{10^{-3}}\ \boldsymbol{près})$$

Méthode 2 : calcul d'intégrale

$$p\left(\underbrace{730}_{2\ ans} \leq X \leq \underbrace{1\,095}_{3\ ans}\right) = \int_{730}^{1\,095} 0{,}004e^{-0{,}004x}dx = [-e^{-0{,}004x}]_{730}^{1\,095} = -e^{-0{,}004\times1\,095} - (-e^{-0{,}004\times730})$$

$\approx \mathbf{0,041}$ $(\boldsymbol{arrondi}$ à $\mathbf{10^{-3}}$ $\boldsymbol{près})$

www.sos-devoirs-corriges.com

© SOS DEVOIRS CORRIGES (marque déposée)

Exercice 4 *(4 questions)* — *Niveau : moyen*

La durée de vie d'un appareil électronique est une variable aléatoire X, exprimée en heures, qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,000 26.

1) Quelle est la probabilité que la durée de vie de l'appareil soit de 1 000 heures au maximum ?
2) En déduire la probabilité que la durée de vie de l'appareil soit d'au moins 1 000 heures.
3) Sachant que la durée de vie de l'appareil a dépassé 1 000 heures, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 2 000 heures ?
4) Sachant que l'appareil a fonctionné plus de 2 000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3 000 heures ?

Correction de l'exercice 4

↻ *Retour au menu*

1) Calculons la probabilité que la durée de vie de l'appareil soit de 1 000 heures au maximum.

$$p(X \leq 1\,000) = \int_0^{1\,000} 0{,}000\,26 \times e^{-0{,}000\,26 \times x} dx = 1 - e^{-0{,}000\,26 \times 1\,000} \approx \mathbf{0,229} \ (\boldsymbol{arrondi} \text{ à } \mathbf{10^{-3}} \ \boldsymbol{près})$$

2) Calculons la probabilité que la durée de vie de l'appareil soit d'au moins 1 000 heures.

$$p(X \geq 1\,000) = 1 - p(X \leq 1\,000) = 1 - 0{,}229 \approx \mathbf{0,771} \ (\boldsymbol{arrondi} \text{ à } \mathbf{10^{-3}} \ \boldsymbol{près})$$

3) Calculons la probabilité que la durée de vie de l'appareil dépasse 2 000 heures, sachant qu'elle a dépassé 1 000 heures.

Rappel : Probabilités conditionnelles (conditionnement par un événement)

Soit p une loi de probabilité définie sur un ensemble Ω. Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$.

La probabilité de l'événement B sachant l'événement A, notée $p_A(B)$, est définie par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

$$p_{(X>1\,000)}(X > 2\,000) = \frac{p\big((X > 1\,000) \cap (X > 2\,000)\big)}{p(X > 1\,000)} = \frac{p(X > 2\,000)}{p(X > 1\,000)} = \frac{e^{-0{,}000\,26 \times 2\,000}}{e^{-0{,}000\,26 \times 1\,000}}$$

$$\approx \mathbf{0,771} \ (\boldsymbol{arrondi} \text{ à } \mathbf{10^{-3}} \ \boldsymbol{près})$$

Rappel : Loi de durée de vie sans vieillissement

Une variable aléatoire positive X est dite « sans mémoire » (ou « sans vieillissement ») lorsque, pour tous réels $t \geq 0$ et $h \geq 0$, $p_{X \geq t}(X \geq t + h) = p(X \geq h)$.

© SOS DEVOIRS CORRIGES (marque déposée)
www.sos-devoirs-corriges.com

Remarque importante (méthode 2) : Comme une loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement, on a également :

$p_{(X>1\,000)}\big(X > 2\,000\big) = p_{(X>1\,000)}\big(X > 1\,000 + 1\,000\big) = p(X > 1\,000) \approx \mathbf{0,771}$ (*arrondi* à $\mathbf{10^{-3}}$ ***près***) d'après la question précédente

4) Calculons la probabilité que l'appareil tombe en panne avant 3 000 heures sachant qu'il a fonctionné plus de 2 000 heures.

$$p_{(X>2\,000)}(X < 3\,000) = \frac{p\big((X > 2\,000) \cap (X < 3\,000)\big)}{p(X > 2\,000)} = \frac{p(2\,000 < X < 3\,000)}{p(X > 2\,000)}$$

$$= \frac{e^{-0,000\,26 \times 2\,000} - e^{-0,000\,26 \times 3\,000}}{e^{-0,000\,26 \times 2\,000}} \approx \mathbf{0,229} \text{ (\textit{arrondi} à } \mathbf{10^{-3}} \textbf{ près})$$

www.sos-devoirs-corriges.com

© SOS DEVOIRS CORRIGES (marque déposée)

Exercice 5 *(1 question)* — *Niveau : moyen*

La durée moyenne d'une conversation téléphonique de M Lokas est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,3 quand Mme Piplaite l'appelle et de paramètre 0,1 sinon. Les trois quarts des appels destinés à M Lokas proviennent de Mme Piplaite. La sonnerie du téléphone retentit et une conversation s'engage. Calculer la probabilité que cette conversation dure plus de cinq minutes.

Correction de l'exercice 5

↻ *Retour au menu*

Soit X la variable aléatoire continue égale à la durée de la conversation téléphonique et soit A l'événement « l'appel téléphonique provient de Mme Piplaite ».

Rappel : Formule des probabilités totales

Soit Ω un univers muni d'une probabilité p. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si les parties $B_1, B_2, \ldots, B_n$, de probabilités non nulles, constituent une partition de Ω,

Alors, pour tout événement A, on a : $p(A) = \sum_{k=1}^{n} p(A \cap B_k)$

Comme $(X \geq 5) = \big((X \geq 5) \cap A\big) \cup \big((X \geq 5) \cap \overline{A}\big)$, il vient alors d'après la formule des probabilités totales puis d'après la formule des probabilités conditionnelles que :

$$p(X \geq 5) = \underbrace{p\big((X \geq 5) \cap A\big) + p\big((X \geq 5) \cap \overline{A}\big)}_{formule\ des\ probabilités\ totales} = \underbrace{p(A) \times p_A(X \geq 5) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(X \geq 5)}_{formule\ des\ probabilités\ conditionnelles}$$

$$= \frac{3}{4} \times e^{-0,3\times5} + \frac{1}{4} \times e^{-0,1\times5} \approx \mathbf{0,319}\ (\textbf{arrondi à } \mathbf{10^{-3}} \textbf{ près})$$

© SOS DEVOIRS CORRIGES (marque déposée)

www.sos-devoirs-corriges.com

Exercice 6 *(2 questions)* *Niveau : difficile*

A) Première partie

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées respectives u' et v' soient continues sur I. Démontrer que, pour tous nombres réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

B) Deuxième partie

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).

On appelle « espérance de X », notée $E(X)$, et « variance de X », notée $V(X)$, les réels tels que :

$$E(X) = \int_a^b xf(x)dx \qquad V(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - \left(E(X)\right)^2$$

En utilisant le résultat de la première partie, exprimer $E(X)$ puis $V(X)$ en fonction de λ.

Correction de l'exercice 6 ↻ *Retour au menu*

A) Première partie

Les fonctions u et v sont dérivables sur I. Par conséquent, par produit de fonctions dérivables sur un même intervalle, la fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$ *(égalité 1)*.

Par ailleurs, comme uv est dérivable sur I, par théorème, uv est continue sur I. De même, étant dérivables sur I, les fonctions u et v sont continues sur I. Et comme u' et v' sont également continues sur I, par produit de fonctions continues sur un même intervalle, les fonctions $u'v$ et uv' sont continues sur I.

Ainsi, d'après la propriété de la linéarité de l'intégrale appliquée à l'*égalité 1*, on a pour tout x de $[a\,;b] \subset I$:

$$\int_a^b (uv)'(x)\,dx = \int_a^b \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Or, la fonction uv est une primitive de la fonction $(uv)'$ donc :

$$\int_a^b (uv)'(x)\,dx = [(uv)(x)]_a^b = [u(x)v(x)]_a^b$$

D'où l'égalité suivante :

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx \Leftrightarrow \boldsymbol{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx}$$

Remarque importante : Cette égalité est appelée « intégration par parties ».

© SOS DEVOIRS CORRIGES (marque déposée)

www.sos-devoirs-corriges.com

B) Deuxième partie

Exprimons dans un premier temps $E(X)$ en fonction du réel λ.

$$E(X) = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t x f(x) dx = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Utilisons le résultat de la première partie en posant $u(x) = x$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, non sans remarquer que u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que v' est continue sur $\mathbb{R}^+$. Alors, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $u'(x) = 1$ (fonction continue sur $\mathbb{R}^+$) et $v(x) = -e^{-\lambda x}$.

$$E(X) = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{v'(x)} dx = \lim_{t \to +\infty} \left(\left[\underbrace{x}_{u(x)} \times \underbrace{\left(-e^{-\lambda x}\right)}_{v(x)} \right]_0^t - \int_0^t \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{\left(-e^{-\lambda x}\right)}_{v(x)} dx \right)$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left(\left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^t + \int_0^t e^{-\lambda x} dx \right) = \lim_{t \to +\infty} \left(\left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^t + \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^t \right)$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left(-t e^{-\lambda t} - 0 + \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} - \frac{e^0}{-\lambda} \right) = \lim_{t \to +\infty} \left(-t e^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right)$$

Etudions cette limite.

D'une part, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \left(-t e^{-\lambda t}\right) = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{-\lambda t e^{-\lambda t}}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} \lim_{t \to +\infty} \left(-\lambda t e^{-\lambda t}\right)$$

Or, $\lim_{t \to +\infty} (-\lambda t) = -\infty$ (car $\lambda > 0$) et $\lim_{T \to -\infty} T e^T = 0$ (croissance comparée) donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim_{t \to +\infty} \left(-\lambda t e^{-\lambda t}\right) = \lim_{T \to -\infty} T e^T = 0$.

D'autre part, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right) = -\frac{1}{\lambda} \lim_{t \to +\infty} \left(e^{-\lambda t}\right)$$

Or, $\lim_{t \to +\infty} (-\lambda t) = -\infty$ (car $\lambda > 0$) et $\lim_{T \to -\infty} e^T = 0$ donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim_{t \to +\infty} \left(e^{-\lambda t}\right) = \lim_{T \to -\infty} e^T = 0$.

Par conséquent, il vient que :

$$\boldsymbol{E(X)} = \lim_{t \to +\infty} \left(-t e^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} \lim_{t \to +\infty} \left(-\lambda t e^{-\lambda t}\right) - \frac{1}{\lambda} \lim_{t \to +\infty} \left(e^{-\lambda t}\right) + \frac{1}{\lambda} = \boldsymbol{\frac{1}{\lambda}}$$

Exprimons dans un second temps $V(X)$ en fonction du réel λ.

$$V(X) = \left(\lim_{t \to +\infty} \int_0^t x^2 f(x) dx \right) - \left(E(X)\right)^2 = \left(\lim_{t \to +\infty} \int_0^t x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \right) - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \left(\lim_{t \to +\infty} \int_0^t x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \right) - \frac{1}{\lambda^2}$$

© SOS DEVOIRS CORRIGES (marque déposée)

www.sos-devoirs-corriges.com

Utilisons le résultat de la première partie en posant $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, non sans remarquer que u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que v' est continue sur $\mathbb{R}^+$. Alors, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $u'(x) = 2x$ (fonction continue sur $\mathbb{R}^+$) et $v(x) = -e^{-\lambda x}$.

$$V(X) = \left(\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \underbrace{x^2}_{u(x)}\underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{v'(x)}\,dx\right) - \frac{1}{\lambda^2} = \left(\lim_{t\to+\infty}\left(\left[\underbrace{x^2}_{u(x)} \times \underbrace{\left(-e^{-\lambda x}\right)}_{v(x)}\right]_0^t - \int_0^t \underbrace{2x}_{u'(x)} \times \underbrace{\left(-e^{-\lambda x}\right)}_{v(x)}\,dx\right)\right) - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= \left(\lim_{t\to+\infty}\left(\left[-x^2e^{-\lambda x}\right]_0^t + 2\int_0^t xe^{-\lambda x}\,dx\right)\right) - \frac{1}{\lambda^2} = \lim_{t\to+\infty}\left[-x^2e^{-\lambda x}\right]_0^t + 2\lim_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-\lambda x}\,dx - \frac{1}{\lambda^2}$$

Or, on a établi que :

$$E(X) = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$$

C'est-à-dire, en divisant par λ non nul :

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

Ainsi, on obtient que :

$$V(X) = \lim_{t\to+\infty}\left[-x^2e^{-\lambda x}\right]_0^t + 2\lim_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-\lambda x}\,dx - \frac{1}{\lambda^2} = \lim_{t\to+\infty}\left[-x^2e^{-\lambda x}\right]_0^t + \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \lim_{t\to+\infty}\left(-t^2e^{-\lambda t}\right) + \frac{1}{\lambda^2}$$

Etudions $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-t^2e^{-\lambda t}\right)$.

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-t^2e^{-\lambda t}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-\lambda^2t^2e^{-\lambda t}}{\lambda^2}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-(-\lambda t)^2e^{-\lambda t}}{\lambda^2}\right) = -\frac{1}{\lambda^2}\lim_{t\to+\infty}(-\lambda t)^2e^{-\lambda t}$$

Or, $\lim\limits_{t\to+\infty}(-\lambda t) = -\infty$ (car $\lambda > 0$) et $\lim\limits_{T\to-\infty} T^2e^T = 0$ (croissance comparée) donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{t\to+\infty}(-\lambda t)^2e^{-\lambda t} = \lim\limits_{T\to-\infty} T^2e^T = 0$. D'où $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-t^2e^{-\lambda t}\right) = 0$.

Finalement, on a :

$$\boldsymbol{V(X) = \lim_{t\to+\infty}\left(-t^2e^{-\lambda t}\right) + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}}$$

www.sos-devoirs-corriges.com

© SOS DEVOIRS CORRIGES (marque déposée)

Exercice 7 *(1 question)* — *Niveau : moyen*

X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Déterminer la valeur du réel λ telle que la probabilité $p(1 \leq X \leq 2)$ soit égale à $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 7

↻ *Retour au menu*

X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Donc $\lambda > 0$.

Par ailleurs, $p(1 \leq X \leq 2) = \frac{1}{4}$. Or, $p(1 \leq X \leq 2) = e^{-\lambda \times 1} - e^{-\lambda \times 2}$, d'où l'égalité : $e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} = \frac{1}{4}$.

Posons $X = e^{-\lambda}$.

Alors $X > 0$. Et, comme $e^{-2\lambda} = \left(e^{-\lambda}\right)^2$, l'équation $e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} = \frac{1}{4}$ devient $X - X^2 = \frac{1}{4}$ (avec $X > 0$).

Or, pour tout X réel positif non nul, $X - X^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow X^2 - X + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{2}$.

Comme $X = \frac{1}{2} > 0$, on a $e^{-\lambda} = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $-\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$. Or, $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2)$. Par conséquent, $-\lambda = -\ln(2)$, c'est-à-dire $\lambda = \ln(2)$.

En conclusion, pour que la probabilité $p(1 \leq X \leq 2)$ soit égale à $\frac{1}{4}$, il faut donc que $\boldsymbol{\lambda = \ln(2)}$.

www.sos-devoirs-corriges.com

© SOS DEVOIRS CORRIGES (marque déposée)

Exercice 8 *(2 questions)* — *Niveau : facile*

Une variable aléatoire positive X est dite « sans mémoire » (ou « sans vieillissement ») lorsque, pour tous réels $t \geq 0$ et $h \geq 0$, $p_{X \geq t}(X \geq t+h) = p(X \geq h)$.

1) Montrer qu'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est sans mémoire.

Pour une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ sans mémoire, on appelle demi-vie la durée τ telle que $p(X < \tau) = 0{,}5$.

2) Montrer que $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Correction de l'exercice 8 — *↻ Retour au menu*

1) Montrons que, si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors elle est sans mémoire.

Pour tous réels $t \geq 0$ et $h \geq 0$,

$$\boldsymbol{p_{X \geq t}(X \geq t+h)} = \frac{p\big((X \geq t) \cap (X \geq t+h)\big)}{p(X \geq t)} = \frac{p(X \geq t+h)}{p(X \geq t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+h)+\lambda t} = e^{-\lambda t - \lambda h + \lambda t}$$

$$= e^{-\lambda h} = \boldsymbol{p(X \geq h)}$$

2) Montrons que, si X suit une loi exponentielle de paramètre λ sans mémoire telle que $p(X < \tau) = 0{,}5$, alors $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

$$p(X < \tau) = 0{,}5 \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda\tau} = 0{,}5 \Leftrightarrow -e^{-\lambda\tau} = -0{,}5 \Leftrightarrow e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda\tau = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -\lambda\tau = -\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

www.sos-devoirs-corriges.com

© SOS DEVOIRS CORRIGES (marque déposée)

Exercice 9 *(3 questions)* — *Niveau : facile*

La durée de vie X du ${}^{14}_{6}C$ (carbone 14) suit une loi exponentielle de paramètre λ. Sa demi-vie est estimée à 5 568 années.

1) Evaluer la probabilité que la durée de vie du carbone 14 soit au maximum de 1 000 ans.
2) Déterminer x tel que $p(X < x) = 0{,}2$.
3) Quelle est approximativement la durée de vie moyenne du carbone 14 ?

Correction de l'exercice 9 — ↻ *Retour au menu*

1) Evaluons la probabilité que la durée de vie du carbone 14 soit au maximum de 1 000 ans.

Notons tout d'abord τ la demi-vie de cet élément radioactif. Comme $\tau = 5\,568$ et comme $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$, on a :

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\tau} = \frac{\ln 2}{5\,568} \ (\approx 1{,}24 \times 10^{-4})$$

Il s'ensuit que $p\big(X \leq 1\,000\big) = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{5\,568}\times 1\,000} \approx \mathbf{0,117}$ (***arrondi*** **à** $\mathbf{10^{-3}}$ ***près***)

2) Déterminons x tel que $p(X < x) = 0{,}2$.

$$p(X < x) = 0{,}2 \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{\ln 2}{5\,568}x} = 0{,}2 \Leftrightarrow -e^{-\frac{\ln 2}{5\,568}x} = -0{,}8 \Leftrightarrow e^{-\frac{\ln 2}{5\,568}x} = 0{,}8 \Leftrightarrow -\frac{\ln 2}{5\,568}x = \ln 0{,}8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 0{,}8}{-\frac{\ln 2}{5\,568}} \approx \mathbf{1\,792,5} \ \boldsymbol{années}$$

3) Calculons approximativement la durée de vie moyenne du carbone 14, notée $E(X)$.

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{\ln 2}{5\,568}} \approx \mathbf{8\,033} \ \boldsymbol{années}$$

Remarque : La demi-vie du carbone 14 est estimée à 5 568 années. Cela signifie qu'au bout de 5 568 années, il ne restera que la moitié des atomes de carbone 14 initiaux, mais cela ne signifie surtout pas que l'intégralité de cet élément radioactif aura disparu après 11 136 années.

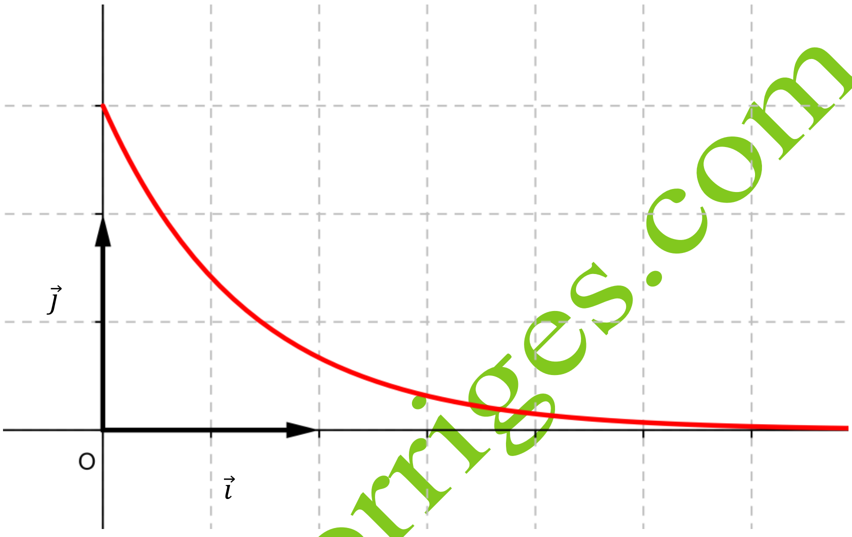
www.sos-devoirs-corriges.com

© SOS DEVOIRS CORRIGES (marque déposée)

Exercice 10 *(4 questions)* — *Niveau : facile*

X est une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La courbe ci-après représente la fonction densité de probabilité associée.

1) Lire graphiquement la valeur de λ.
2) Calculer $p(X < 1)$.
3) Calculer $p(X \geq 2)$.
4) En déduire $p(1 \leq X \leq 2)$.



Correction de l'exercice 10 — ↻ *Retour au menu*

1) X est une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. Lisons graphiquement la valeur de λ.

On sait qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ si sa densité de probabilité est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

f est la fonction densité de probabilité représentée par la courbe. Par conséquent, $\boldsymbol{\lambda} = f(0) = \mathbf{1,5}$.

On en déduit que f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 1{,}5e^{-1,5x}$.

2) Calculons $p(X < 1)$.

$p(X < 1) = 1 - e^{-1,5\times 1} \approx \mathbf{0,777}$ (***arrondi*** **à** $\mathbf{10^{-3}}$ ***près***)

3) Calculons $p(X \geq 2)$.

$p(X \geq 2) = e^{-1,5\times 2} \approx \mathbf{0,050}$ (***arrondi*** **à** $\mathbf{10^{-3}}$ ***près***)

4) Déduisons-en $p(1 \leq X \leq 2)$.

$p(1 \leq X \leq 2) = 1 - \big(p(X < 1) + p(X \geq 2)\big) \approx 1 - (0{,}777 + 0{,}050) \approx \mathbf{0,173}$ (***arrondi*** **à** $\mathbf{10^{-3}}$ ***près***)

Remarques :

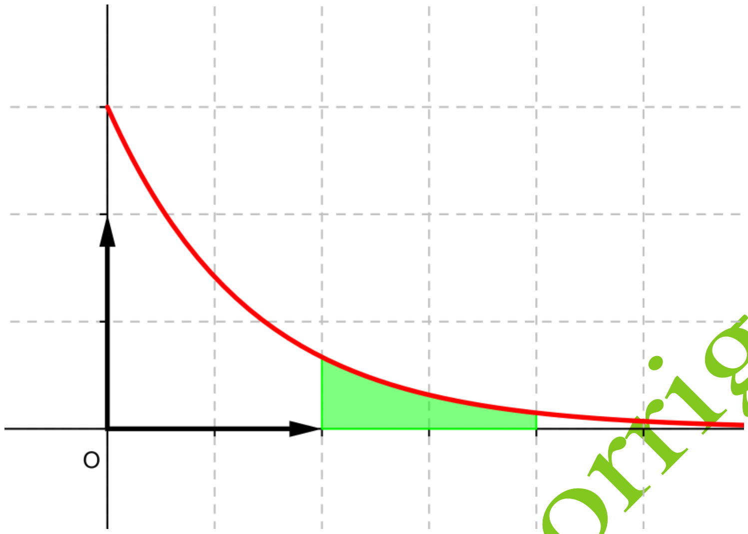
✓ Il était également possible d'appliquer directement la formule $p(1 \leq X \leq 2) = e^{-1,5\times 1} - e^{-1,5\times 2}$ mais, dans ce cas, la consigne (qui imposait que le résultat soit déduit des résultats précédents) n'aurait pas été respectée.

www.sos-devoirs-corriges.com

© SOS DEVOIRS CORRIGES (marque déposée)

✓ La probabilité $p(1 \leq X \leq 2)$ est représentée dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ par l'aire du domaine vert, situé entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation respective $x = 1$ et $x = 2$.

En effet, $p(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \underbrace{1{,}5e^{-1{,}5x}}_{f(x)}\,dx$



www.sos-devoirs-corriges.com

© SOS DEVOIRS CORRIGES (marque déposée)