Chapitre 15 : Lois normales

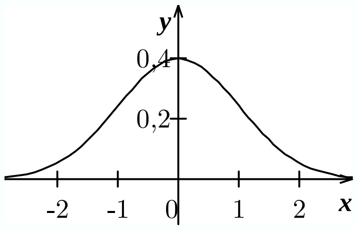
Sommaire

1. Loi normale centrée réduite

Définition

La variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0,1)$, si elle admet pour densité de probabilité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



En pratique

La représentation graphique de φ s'appelle courbe de Gauss ou courbe en cloche.
De plus, la fonction φ est paire, ainsi, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

(i) X admet une espérance $E(X)$ définie par $E(X) = \lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^0 tf(t)\mathrm{d}t + \lim\limits_{y \to +\infty} \int_0^y tf(t)\mathrm{d}t = 0$

(ii) X admet une variance $V(X)$ définie par $V(X) = E(X - E(X))^2 = 1$

Démonstration

(i) $\displaystyle\int_x^0 tf(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^0 te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_x^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-1 + e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$

De même : $\displaystyle\int_0^y tf(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{-\frac{y^2}{2}} + 1\right)$

D'où, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \int_x^0 tf(t)\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}$ et $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} \int_0^y tf(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, donc $E(X) = 0$ ■

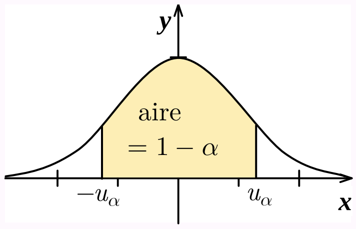
Explication

Le 0 et le 1 de la notation $\mathcal{N}(0,1)$ font respectivement référence à l'espérance et à la variance de la loi normale centrée réduite.

Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0{,}1)$.
Pour tout réel $\alpha \in \left]0;1\right[$, il existe un unique réel positif u_α tel que :

$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha .$$



Démonstration

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$ par :

$$F(u) = P(-u \leqslant X \leqslant u) = \int_{-u}^{u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t .$$

On constate que $F(0) = 0$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} F(u) = \lim\limits_{u\to+\infty} \int_{-u}^{u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$ (aire sous la courbe est 1)

Montrons que F est strictement croissante sur $\left[0;+\infty\right[$:

Comme φ est paire, $F(u) = 2\int_{0}^{u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$, et comme φ est continue et positive, F est dérivable et :

$$F'(u) = 2\varphi(u) > 0$$

Ainsi F est strictement croissante sur $\left[0;+\infty\right[$.

Soit $\alpha \in \left]0;1\right[$, alors : $0 < 1-\alpha < 1$, et grâce au théorème de la bijection, on en déduit qu'il existe un unique réel $u_\alpha \in \left[0;+\infty\right[$ tel que $F(u) = P(-u \leqslant X \leqslant u) = 1-\alpha$ ∎

En pratique

Il n'existe pas de formule exprimant u_α en fonction de α.

Il faut retenir deux valeurs particulières : $u_{0{,}05} \approx 1{,}96$ et $u_{0{,}01} \approx 2{,}58$.

Ainsi, une variable suivant la loi $\mathcal{N}(0{,}1)$ fluctue donc à 95 % entre $-1{,}96$ et 1,96, et fluctue à 99 % entre $-2{,}58$ et 2,58.

2. Loi normale générale

Définition

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ si $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0{,}1)$.

En pratique

Lorsque $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ est la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0{,}1)$.

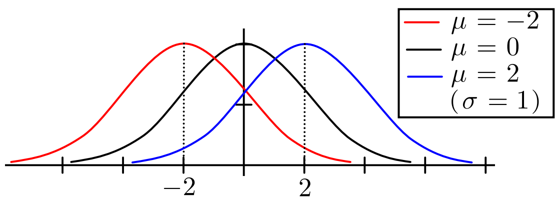
Théorème

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ alors :

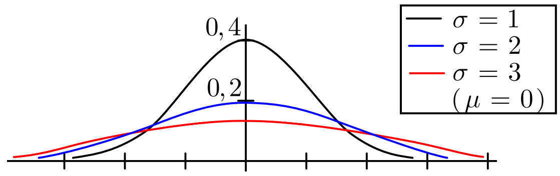
$$E(X) = \mu\,,\ V(X) = \sigma^2 \text{ et son écart-type vaut } \sigma$$

Explication

Le paramètre μ de la loi $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ est un paramètre de *position* : il localise la zone où les réalisations de X ont le plus de chance d'apparaître.



Le paramètre σ de la loi $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ est un paramètre de *dispersion*. Plus σ est élevé, plus les réalisations de X sont dispersés autour de l'espérance μ.



Théorème

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$, sa dispersion autour de μ dépend de σ de la manière suivante (à 10^{-3} près) :

$$P(X\in[\mu-\sigma;\mu+\sigma])=0{,}683$$
$$P(X\in[\mu-2\sigma;\mu+2\sigma])=0{,}954$$
$$P(X\in[\mu-3\sigma;\mu+3\sigma])=0{,}997$$

Explication

Si X suit la loi $\mathcal{N}(10;9)$, on a $\mu=9$ et $\sigma=3$ donc les réalisations de X fluctuent à plus de 95 % dans l'intervalle $[10-2\times3;10+2\times3]=[4;16]$.

En pratique (Loi normale et calculatrice)

Exemple pour X qui suit la loi $\mathcal{N}(113,25)$, calculer $P(110\leqslant X\leqslant 120)$ et $P(X\leqslant 120)$

Casio

Opération	Affichage
$\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{F5}}$ (STAT) $\boxed{\text{F3}}$ (DIST) $\boxed{\text{F1}}$ (NORM) $\boxed{\text{F2}}$ (Ncd) 110 $\boxed{,}$ 120 $\boxed{,}$ 5 $\boxed{,}$ 113) $\boxed{\text{EXE}}$	NormCD (110,120,5,113) .6449902243
$\boxed{\text{F2}}$ (Ncd) -10^99 $\boxed{,}$ 120 $\boxed{,}$ 113 $\boxed{,}$ 5) $\boxed{\text{EXE}}$	NormCD (-10^99,120,5,113) .9192433408

TI

Opération	Affichage
$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{DISTR}}$ 2 : normalcdf(110 $\boxed{,}$ 120 $\boxed{,}$ 113 $\boxed{,}$ 5) $\boxed{\text{enter}}$	normalcdf(110,120,113,5) .6449902243
$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{DISTR}}$ 2 : normalcdf(-10^99 $\boxed{,}$ 120 $\boxed{,}$ 113 $\boxed{,}$ 5) $\boxed{\text{enter}}$	normalcdf(-10^99,120,113,5) .9192432888

ATTENTION !!!

Il ne faut pas rentrer σ^2 mais σ sur la calculatrice. Enfin, il faut faire attention à l'ordre quand on rentre les valeurs. Pour calculer $P(a\leqslant X\leqslant b)$:

Casio	TI
NormCD(a,b,σ,μ)	normalcdf(a,b,μ,σ)

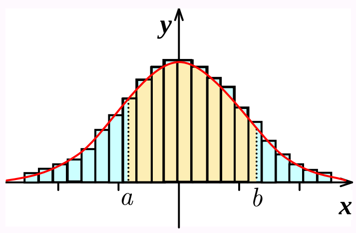
3. Théorème de Moivre-Laplace

Théorème de Moivre-Laplace

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel dans $[0;1]$.
Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
Alors, pour tous réels a et b, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a\leqslant \frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant b\right)=P(a\leqslant Z\leqslant b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

où Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$



Explication

On notera que $E(X_n)=np$ et $\sigma(X_n)=\sqrt{np(1-p)}$.

La loi binomiale est très utilisée en modélisation, mais certaines probabilités sont impossibles à calculer pour la loi binomiale. Grâce à ce théorème, le calcul de ces probabilités est rendu possible à l'aide de la loi normale. C'est historiquement la première motivation de l'utilisation de la loi normale.

En pratique
On considère que la limite dans le théorème de Moivre-Laplace est pratiquement atteinte lorsqu'on a simultanément : $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.
Dans ces conditions, on a donc pour tous réels a et b :

$$P\left(a \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b\right) \approx P(a \leqslant Z \leqslant b)\text{, où } Z \text{ suit la loi normale centrée réduite } \mathcal{N}(0,1)\,.$$

Exercice

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}\left(180\,;\frac{1}{6}\right)$. On souhaite calculer $P\left(-0{,}5 \leqslant \frac{X-30}{5} \leqslant 1{,}2\right)$.

1. Est-il raisonnable d'utiliser l'approximation normale fournit par le théorème de Moivre-Laplace pour calculer cette probabilité ?
2. Donner une valeur approchée de la probabilité demandée à 10^{-2} près en utilisant l'approximation de Moivre-Laplace.

Solution

1. Vérifions si les trois conditions sont bien vérifiées :
$$n = 180 \geqslant 30 \;\; ; \;\; np = 180 \times \frac{1}{6} = 30 \geqslant 5 \;\; ; \;\; n(1-p) = 180 \times \left(\frac{5}{6}\right) = 150 \geqslant 5$$
Par conséquent, il est raisonnable d'utiliser l'approximation du théorème de Moivre-Laplace.
2. On remarque que $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = 5$. Ainsi :
$$P\left(-0{,}5 \leqslant \frac{X-30}{5} \leqslant 1{,}2\right) = P\left(-0{,}5 \leqslant \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant 1{,}2\right)$$
D'après la question précédente, en utilisant l'approximation de Moivre-Laplace :
$$P\left(-0{,}5 \leqslant \frac{X-30}{5} \leqslant 1{,}2\right) = P\left(-0{,}5 \leqslant \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant 1{,}2\right) \approx P(-0{,}5 \leqslant Z \leqslant 1{,}2)$$
où Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0{,}1)$
A l'aide de la calculatrice, on obtient $P(-0{,}5 \leqslant Z \leqslant 1{,}2) \approx 0{,}58$