Fiche d'exercices 15 : Lois normales

Loi normale centrée réduite

Exercice 1

Une variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0{,}1)$. On donne $P(Z \leqslant 1{,}8) \approx 0{,}964$ et $P(Z \leqslant 2{,}3) \approx 0{,}989$. Calculer les probabilités suivantes :

(a) $P(Z > 2{,}3)$.
(b) $P(Z < -1{,}8)$.
(c) $P(-1{,}8 < Z < 2{,}3)$.
(d) $P(Z < -1{,}8 \text{ ou } Z > 2{,}3)$.

Exercice 2

Une variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0{,}1)$. On donne $P(Z < -2{,}3) \approx 0{,}011$ et $P(Z < 2{,}9) \approx 0{,}998$. Calculer les probabilités suivantes :

(a) $P(Z \geqslant -2{,}3)$.
(b) $P(Z > 2{,}9)$.
(c) $P(-2{,}3 < Z < 2{,}9)$.
(d) $P(Z < -2{,}3 \text{ ou } Z > 2{,}9)$.

Exercice 3

Une variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0{,}1)$. Illustrer par un schéma :

(a) $P(Z < 2)$.
(b) $P(Z > -1)$.
(c) $P(-1 < Z < 2)$.
(d) $P(Z < -1 \text{ ou } Z > 2)$.

Exercice 4

Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(0{,}1)$.

On définit Φ, la fonction de répartition de X, sur $\mathbb{R}$, par : $\Phi(x) = P(X \leqslant x)$.

1. Montrer que pour tous nombres a, b réels $a < b$:
$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(b)$$
2. Montrer que pour tout nombre réel x : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Exercice 5

Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(0{,}1)$.

Calculer, à l'aide de la table donnée en annexe page 5 :

(a) $P(X \leqslant 1{,}5)$.
(b) $P(X \geqslant -1)$.
(c) $P(X > 0{,}53)$.
(d) $P(X \leqslant -1{,}09)$.
(e) $P(0{,}53 \leqslant X \leqslant 1{,}53)$.
(f) $P(X \geqslant -3{,}98)$.

Exercice 6

Une variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0{,}1)$.

1. Déterminer $P(Z \leqslant 1{,}2)$ à l'aide de la table donnée en annexe.

2. En déduire :

(a) $P(Z > 1{,}2)$.
(b) $P(Z \leqslant -1{,}2)$.
(c) $P(-1{,}2 \leqslant Z \leqslant 1{,}2)$.
(d) $P(Z < -1{,}2 \text{ ou } Z > 1{,}2)$.

Exercice 7

Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(0{,}1)$.

Pour tout réel $x > 0$, on pose $\Phi(x) = P(X \leqslant x)$

1. Montrer que $P(-x \leqslant X \leqslant x) = 2\Phi(x) - 1$

2. En déduire que, pour tout réel $\alpha \in \left]0;1\right[$:
$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha \iff \Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

3. **(a)** Pour $\alpha = 0{,}05$, quelle doit être la valeur de $\Phi(u_\alpha)$?
À l'aide de la table donnée en annexe, déterminer la valeur de u_α correspondante.

(b) Déterminer ainsi $u_{0{,}02}$ et $u_{0{,}001}$.

Exercice 8

On veut construire un algorithme permettant de déterminer le seuil u_α à 0,01 près.
On suppose que l'on dispose d'une instruction du type `Norm(a,b)`, qui renvoie $P(X \in [a,b])$, lorsque X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0{,}1)$.

1. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il permette d'obtenir, α étant donné par l'utilisateur, une valeur approchée de u_α à 0,01 près.

```
Variables

Début
   Entrer la valeur de α
   u prend la valeur 0
   p prend la valeur 0
       TantQue p < 1 − α
          p prend la valeur Norm(-u,u)
          u prend la valeur
       Fin TantQue
   Afficher
Fin
```

2. Modifier l'algorithme pour qu'il demande à l'utilisateur la précision souhaitée.

Exercice 9

φ est la fonction de Laplace-Gauss.

1. **(a)** Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\varphi'(x) = -x\varphi(x) \text{ et } \varphi''(x) = \left(x^2 - 1\right)\varphi(x)$$
(b) En déduire que φ' admet un maximum et un minimum.

2. Soit Γ la courbe de φ, déterminer une équation de la tangente à Γ en A d'abscisse 1. Qu'observe-t-on graphiquement ?

Loi normale générale

Exercice 10

On se propose de démontrer le théorème suivant donné dans le cours :

« Si X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ alors : $E(X)=\mu$, $V(X)=\sigma^2$ »

On admet que les propriété $E(aY+b)=aE(Y)+b$ et $V(Y)=E\left(\left(Y-E(Y)\right)^2\right)$, vraies pour une variable aléatoire discrète Y reste vraies pour une variable aléatoire à densité.

1. On pose $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$

(a) Préciser $E(Z)$ et $V(Z)$.

(b) Démontrer que $V(Z)=E\left(Z^2\right)$

(c) Exprimer X en fonction de Z.

2. En déduire que $E(X)=\mu$.

3. En déduire que $V(X)=\sigma^2$.

Exercice 11

Une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance -4 et d'écart-type 7.

Calculer avec trois décimales :

(a) $P(X\leqslant -11)$. **(b)** $P(-11\leqslant X\leqslant 3)$.

(c) $P(X<-11 \text{ ou } X>3)$. **(d)** $P(-18<X<10)$.

(e) $P(X\leqslant -18 \text{ ou } X\geqslant 10)$. **(f)** $P(X\leqslant -10 \text{ ou } X\geqslant 18)$.

Exercice 12

Une machine produit des clous dont la longueur moyenne est 12 mm, avec écart-type de 0,2 mm.

La longueur L d'un clou pris au hasard est une variable aléatoire qui suit une loi normale.

Un clou est jugé défectueux si sa longueur est supérieure à 12,5 mm ou inférieur à 11,5 mm.

1. Quelle est la proportion de clou défectueux ?

2. Pour un clou défectueux pris au hasard, quelle est la probabilité que sa longueur soit inférieure à 11,5 mm ?

Exercice 13

Une variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On donne $P(Z<1)=0,84$.

Déterminer sans calculatrice :

(a) $P(X\leqslant 10)$ pour $X\sim\mathcal{N}(8;4)$. **(b)** $P(X\geqslant 0)$ pour $X\sim\mathcal{N}(-5;25)$.

(c) $P(X<0)$ pour $X\sim\mathcal{N}(5;25)$. **(d)** $P(1<X<5)$ pour $X\sim\mathcal{N}(5;16)$.

Exercice 14

Une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(3;4)$ et Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Soit $x\in\mathbb{R}$, montrer que $P(X\leqslant x)=P\left(Z\leqslant\dfrac{x-3}{2}\right)$

2. En déduire, sans calculatrice, le réel x tel que $P(X\leqslant x)=0,95$.

Exercice 15

Une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(20;4)$.

En utilisant la fonction `InvNormCD` ou `invNorm` de la calculatrice :

1. Donner à 10^{-2} près, x tel que $P(X\leqslant x)=0,8$

2. Donner à 10^{-2} près, x tel que $P(X\geqslant x)=0,8$

Exercice 16

Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(100;100)$.

Calculer

1. À l'aide de la calculatrice, à 10^{-2} près, $P(X>120)$;

2. Sans calculatrice, une valeur approchée de nombre réel positif a tel que :

$$P(100-a\leqslant X\leqslant 100+a)=0,99$$

Exercice 17

Une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}\left(0;\sigma^2\right)$ et Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que pour tout $\sigma>0$, $P(X<5)=P\left(Z<\dfrac{5}{\sigma}\right)$.

2. Donner le réel $x>0$ à 10^{-3} près tel que $P(Z<x)=0,8$.

3. En déduire la valeur de σ à 10^{-3} près telle que $P(X<5)=0,8$

Exercice 18

Une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(\mu;16)$, où $\mu\in\mathbb{R}$, et Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que pour tout $\mu\in\mathbb{R}$, $P(X>20)=P\left(Z>\dfrac{20-\mu}{4}\right)$.

2. Donner le réel x, à 10^{-3} près tel que $P(Z>x)=0,01$.

3. En déduire la valeur de μ telle que $P(X>20)=0,01$

Exercice 19

La durée de vie d'une ampoule, mesurée en heures, est une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$. On a pu déterminer expérimentalement les probabilités : $P(D>2000)=0,9251$ et $P(D>3000)=0,8577$.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire $\dfrac{D-\mu}{\sigma}$?

2. Déterminer un système vérifié par μ et σ.

3. En déduire μ et σ.

4. Déterminer $P(D<1000)$ et $P(D>5000)$.

Exercice 20

La valeur Z de la fluorescence de la chlorophylle α en milieu océanique, exprimée en millivolt, suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$.

On a pu expérimentalement vérifier que :

$$P(Z<39)=09357 \text{ et } P(Z<25{,}5)=0{,}2266$$

1. Quelle loi suit la variable aléatoire $\dfrac{Z-\mu}{\sigma}$?
2. Déterminer un système vérifié par μ et σ.
3. En déduire μ et σ.

Exercice 21

On a observé que la taille T des basketteurs, en cm, suivait approximativement une loi normale $\mathcal{N}(195;36)$.

1. Déterminer, sans calcul, un intervalle dans lequel la taille d'un basketteur pris au hasard, a deux chances sur trois de se trouver.
2. Un recruteur décide de restreindre sa recherche aux basketteurs qui se situe dans le plus petit intervalle I centré en 195 tel que $P(T\in I)\approx 0{,}8$.
   (a) Déterminer cet intervalle, sachant que $u_{0,2}\approx 1{,}28$.
   (b) Sachant que le meilleur basketteur français, Tony Parker, mesure $1{,}86$ m, que peut-on penser du choix du recruteur ?

Exercice 22

Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$.

1. Que vaut $P(|X-\mu|<\sigma)$?
2. Que vaut $P(|X-\mu|<2\sigma)$?
3. Que vaut $P(|X-\mu|<3\sigma)$?
4. On fixe $\mu=100$. Déterminer σ pour que : $P(|X-100|<10)=0{,}95$.

Exercice 23

Une machine remplit des flacons de produit de nettoyage pour lentille de contact. Dans la production d'une journée, on prélève au hasard un flacon. On désigne par V la variable aléatoire qui, à chaque flacon, associe le volume de produit en ml.

1. On suppose que V suit $\mathcal{N}(250;16)$. Calculer la probabilité que le volume de produit, soit compris entre 245 et 255 millilitres, à 10^{-4} près.
2. Le réglage de la machine est modifié de façon que 95 % des flacons contiennent entre 245 et 255 millilitres de produit. On suppose qu'après réglage, la variable aléatoire V suit la loi $\mathcal{N}(250;\sigma)$.
   Calculer σ.

Exercice 24

Une machine industrielle est capable de produire des pièces métalliques de longueur X (en centimètres) suivant une loi $\mathcal{N}(\mu,1)$. Le caractère aléatoire de X et notamment sa variance $\sigma^2=1$ reflètent les imprécisions de fabrication. On souhaite régler la machine, autrement dit μ, pour qu'elle produise des pièces de longueur comprise entre 99 et 101 centimètres avec la probabilité la plus grande possible. Pour tout $\mu\in\mathbb{R}$, on pose : $g(\mu)=P(99\leqslant X\leqslant 101)$.

1. Soit $Z=X-\mu$. Quelle loi suit la variable aléatoire Z ?
2. Exprimer $g(\mu)$ en fonction de Z.
3. Soit la fonction F définie pour tout x par $F(x)=\displaystyle\int_{100}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, où f désigne la densité de Z. Déterminer la dérivée de F en fonction de f.
4. Exprimer, pour tout μ, $g(\mu)$ en fonction de F.
5. En déduire $g'(\mu)$ pour tout μ.
6. Établir le tableau de variation de g.
7. En déduire la valeur de μ qui maximise $P(99\leqslant X\leqslant 101)$.
   Que vaut cette probabilité maximale ?

Théorème de Moivre-Laplace

Exercice 25

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(121;0{,}5)$.

1. Calculer à l'aide d'une calculatrice, $P\left(-2\leqslant\dfrac{X-60{,}5}{5{,}5}\leqslant 2\right)$.
2. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   Que vaut $P(-2\leqslant Z\leqslant 2)$.
3. Pourquoi ces deux quantités sont-elles proches ?

Exercice 26

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(81;0{,}2)$.

1. D'après le théorème de Moivre-Laplace, à quelle intégrale et approximativement égale, $P\left(-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{X-16{,}2}{3{,}6}\leqslant\dfrac{3}{2}\right)$?
2. Pourquoi peut-on raisonnablement accepter l'approximation précédente ?
3. En déduire que : $P(14{,}4<X<21{,}6)\approx P\left(-\dfrac{1}{2}<Z<\dfrac{3}{2}\right)$, où $Z\sim\mathcal{N}(0;1)$
4. Utiliser l'approximation précédente pour calculer $P(14{,}4<X<21{,}6)$.
5. Comparer avec la valeur de $P(14{,}4<X<21{,}6)$ fournie par la calculatrice.

Exercice 27

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(36;0{,}2)$.

1. Pour k, entier naturel compris entre 0 et 36, exprimer $P(X=k)$.

2. Que valent l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$?

3. Calculer à l'aide d'une calculatrice :

(a) $P\left(-1 \leqslant \dfrac{X-7{,}2}{2{,}4} \leqslant 1\right)$;

(b) $P(20 < X \leqslant 36)$;

(c) $P(X \geqslant 7{,}2)$;

4. Justifier l'approximation suivante : pour tout réels a et b vérifiant $a<b$,
$P\left(a \leqslant \dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)} \leqslant b\right) \approx P(a \leqslant Z \leqslant b)$, où $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$.

5. Utiliser l'approximation précédente pour calculer :

(a) $P\left(-1 \leqslant \dfrac{X-7{,}2}{2{,}4} \leqslant 1\right)$;

(b) $P(20 < X \leqslant 36)$;

(c) $P(X \geqslant 7{,}2)$;

Exercice 28

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(1760;0{,}1)$.

1. Calculer à l'aide d'une calculatrice la valeur à 10^{-4} près, $P(X \geqslant 180)$.

2. Compléter la définition suivante en remplaçant les points d'interrogations par leur valeur : $P(X \geqslant 180) = \displaystyle\sum_{k=?}^{?} \binom{1760}{k} 0{,}1^k 0{,}9^?$

3. Essayer de calculer le premier terme de cette somme à l'aide d'une calculatrice.
Pour calculer $P(X \geqslant 180)$, les calculatrices ne peuvent pas utiliser la définition précise rappelée en **2.** : elles utilisent une approximation.

4. Justifier que les conditions pratiquent d'utilisation du théorème de Moivre-Laplace sont réunis.

5. Calculer la probabilité précédente en utilisant l'approximation fournie par le théorème de Moivre-Laplace.

6. Le résultat est-il le même qu'en **1.** ?

Commentaire : les calculatrices utilisent en fait une autre approximation, plus précise que celle fournie par le théorème de Moivre-Laplace, basée sur la formule de Stirling.

Exercice 29

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(70;0{,}7)$.

1. Calculer à l'aide d'une calculatrice la valeur à 10^{-3} près, de $P(45 \leqslant X \leqslant 55)$

2. Justifier que les conditions pratiques d'utilisation du théorème de Moivre-Laplace sont réunies.

3. Calculer la probabilité précédente en utilisant l'approximation fournie par le théorème de Moivre-Laplace.

Exercice 30

Une usine fabrique des balles de tennis. Un contrôle de qualité montre que 3 % des balles produites ne sont pas conformes au cahier des charges de la fabrication. On prélève au hasard dans la production 300 balles. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 300 balles tirées, associe le nombres de balles non-conformes.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 4 balles non-conformes, puis au plus 4 balles non-conformes.

3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de X.

4. Montrer que la loi de $\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ peut-être approchée par la loi normale centrée réduite.

5. En utilisant l'approximation précédente, calculer $P(X \leqslant 12)$ et $P(6 \leqslant X \leqslant 12)$.

Exercice 31

Un magasin spécialisé dans la vente de téléphones portables fait une promotion sur un type d'appareil A. Dans une journée 150 personnes se présentent. La probabilité pour qu'une personne achète l'appareil A est de 0,4. On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre d'articles A vendus en une journée.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
Calculer son espérance et son écart-type.

2. Montrer que la loi de $\dfrac{X-60}{6}$ peut-être approchée par la loi normale centrée réduite.

3. En utilisant l'approximation précédente, calculer les probabilités suivante à 10^{-4} près :

$$P(X \leqslant 72),\ P(X \geqslant 69) \text{ et } P(69 \leqslant X \leqslant 72)$$

Table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

La fonction $\Phi : x \longmapsto P(X \leqslant x)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

- ✓ La table suivante donne une valeur approchée de $\Phi(x)$ à 10^{-4} près, pour x compris entre 0 et 3,99.
  Les lignes indiquent les deux premiers chiffres de x, et les colonnes le troisième.
  Exemple
  Pour $x = 1{,}54 = 1{,}5 + 0{,}04 \; : \; \Phi(x) \approx 0{,}9382$.
- ✓ Lorsque $x < 0$, on utilise la formule $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ (démontrer l'exercice 4)
  Exemple
  Pour $x = -0{,}88 \; : \; \Phi(-0{,}88) = 1 - \Phi(0{,}88) = 1 - \Phi(0{,}8 + 0{,}08) \approx 1 - 0{,}8106 = 0{,}1894$.

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000