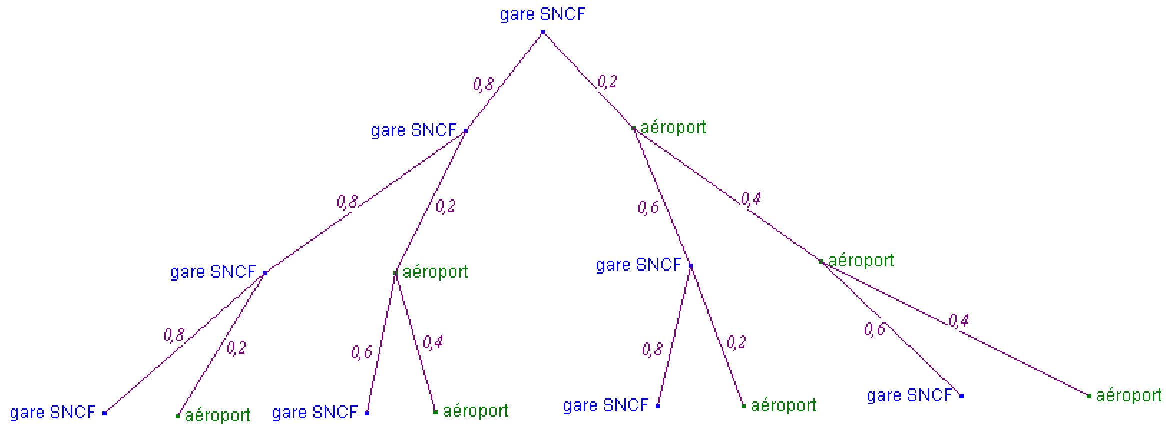
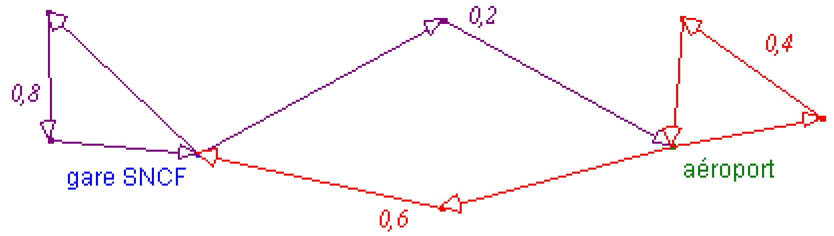
7/ graphes probabilistes

Prenons l'exemple d'un taxi qui prend ses clients soit à la gare SNCF, soit à l'aéroport. Le matin, il se positionne à la gare SNCF. Quand il prend un client à la gare SNCF, 4 fois sur 5, sa course l'emmène dans le grand Nantes intra périphérique (donc avec la probabilité 0,8), et il revient se positionner à la gare SNCF. 1 fois sur 5, sa course l'emmène hors de la ceinture du périphérique (donc avec la probabilité 0,2), et ensuite il va attendre le client suivant à l'aéroport. Quand il est à l'aéroport, 3 fois sur 5, sa course l'emmène dans le grand Nantes intra périphérique (donc avec la probabilité 0,6), et il revient se positionner à la gare SNCF. 2 fois sur 5, sa course l'emmène hors de la ceinture du périphérique (donc avec la probabilité 0,4), et ensuite il retourne attendre le client suivant à l'aéroport.
On peut appeler « état 1 » le taxi attendant son client à la gare SNCF, et « état 2 » le taxi attendant son client à l'aéroport. Au départ, on peut convenir de l'état initial symbolisé par le couple (1 ; 0) : 1 est la probabilité que le taxi soit à la gare (événement certain) et 0 la probabilité que le taxi soit à l'aéroport (événement impossible, puisqu'il part de la gare). Après un certain nombre de courses, la position du taxi peut donc être représentée selon l'arbre de probabilités suivant :



On voit vite les limites d'une telle représentation, dès que les épreuves sont multiples et / ou se répètent plus de 4 fois ! C'est pour ne pas tomber dans cet inconvénient qu'on a recours au graphe probabiliste. Ainsi, la situation décrite ci-dessus peut se représenter de cette façon :



Évidemment, le taxi ne va pas faire des centaines (ni des milliers) de courses dans la journée ! mais c'est le même principe que l'on va adopter pour étudier des phénomènes aléatoires qui se répètent de cette façon un très grand nombre de fois.

Un graphe probabiliste est un graphe orienté pondéré tel que :

1) d'un sommet à un autre, il y a au plus un arc ;
2) tous les poids des arcs sont compris entre 0 et 1 ;
3) la somme des poids des arcs partant de chaque sommet est égale à 1.

Les sommets représentent les différents états d'un système, le poids des arcs représente la probabilité de passer d'un état à un autre.

graphes probabilistes d'ordre 2

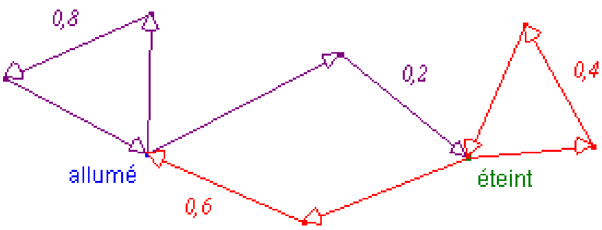
On s'intéresse à une situation présentant **deux états et deux seulement**, que l'on appellera état 1 et état 2 ; par exemple : (allumé , éteint) . On peut passer d'un état à un autre, c'est-à-dire passer d'allumé à éteint, d'allumé à allumé, d'éteint à éteint ou d'éteint à allumé. On se place dans la situation où la probabilité de passer d'un état à un autre est constante, et indépendante des changements d'états précédents. On aura donc :

état initial	**état final**	**probabilité de changer d'état**
état 1	état 2	p_1
état 1	état 1	$1 - p_1$
état 2	état 1	p_2
état 2	état 2	$1 - p_2$

Avec l'exemple (allumé , éteint) on peut par exemple imaginer une diode qui, quand elle est allumée, peut s'éteindre avec la probabilité 0,2 (et donc rester allumée avec la probabilité 0,8), et quand elle est éteinte, peut s'allumer avec la probabilité 0,6 (et donc rester éteinte avec la probabilité 0,4). On aura alors :

état initial	**état final**	**probabilité de changer d'état**
allumé	éteint	0,2
allumé	allumé	0,8
éteint	allumé	0,6
éteint	éteint	0,4

C'est exactement le même problème que le taxi. On modélise ces différents passages d'un état à un autre avec ce graphe probabiliste :



On associe à ce graphe sa ***matrice de transition*** où chaque terme indique la probabilité de passage d'un état à un autre :

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Il faut partir d'un état connu : soit la diode est allumée, soit elle est éteinte ! On va supposer que l'état de départ (appelé état 0) est la diode allumée. On aura donc avant tout changement d'état :

probabilité que la diode est allumée = 1
probabilité que la diode est éteinte = 0

On le symbolise par une matrice ligne $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

On parlera de l'état 1 après un changement d'état, de l'état 2 après deux changements d'état, etc… On obtient alors l'état $n = (a_n , b_n)$ avec la matrice ligne $P_n = P_0 \times M^n$:

état	calcul matriciel correspondant	interprétation
1	$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$	Après un changement d'état, la diode est allumée avec une probabilité 0,8 et éteinte avec une probabilité 0,2.
2	$P_2 = P_1 \times M = P_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}76 & 0{,}24 \end{pmatrix}$	Après deux changements d'état, la diode est allumée avec une probabilité 0,76 et éteinte avec une probabilité 0,24.
3	$P_3 = P_2 \times M = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 0{,}752 & 0{,}248 \end{pmatrix}$	Après trois changements d'état, la diode est allumée avec une probabilité 0,752 et éteinte avec une probabilité 0,248.

On peut alors s'intéresser à la répétition d'un grand nombre de changements d'états, c'est à dire rechercher s'il existe une limite pour chacune des suites a_n et b_n quand $n \to +\infty$. Si c'est le cas, on dira alors que l'état P_n converge vers un ***état stable***.

On admettra que si M est différente des matrices triviales $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, l'état P_n converge toujours vers un état stable P, et que cet état stable P ne dépend que de la matrice de transition M (il est donc indépendant de l'état initial P_0). Cet état stable vérifie l'équation matricielle $P = P \times M$.

<u>Comment trouver l'état stable ?</u>

On cherche une matrice ligne P = (x , y) avec $x + y = 1$ telle que $P = P \times M$.

De façon générale, pour trouver l'état stable $P = (x , y)$ correspondant à la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$, on résout le système linéaire $\begin{cases} x + y = 1 \\ (1-a)x + (b-1)y = 0 \end{cases}$.

Dans l'exemple étudié, on peut conjecturer et vérifier que l'état stable est $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. La diode reste donc allumée les trois quarts du temps. (pour l'exemple du taxi, statistiquement, il repartirait donc de la gare SNCF les 3 quarts de ses courses ; dans la réalité, il n'y aurait pas assez de courses en une seule journée pour que ce résultat soit fiable)

Les questions que l'on peut vous poser :	*propriétés correspondante des graphes :*	*techniques mises en œuvre :*
Associer une matrice de transition à un graphe probabiliste. Reconnaître qu'une matrice est une matrice de transition d'un graphe probabiliste et lui associer un graphe.	Une matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n qui est telle que : - - le terme situé sur la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne a pour valeur le poids de l'arête orientée allant de i vers j si cette arête existe, 0 sinon ; - - la somme des termes de chaque ligne est égale à 1.	
Utiliser un graphe probabiliste pour déterminer l'état probabiliste lors de l'étape n.	Si M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste, si P_0 est la matrice ligne décrivant l'état initial et P_k l'état probabiliste à l'étape *k*, on a : $P_k = P_0 \times M^k$.	
Rechercher un état stable d'un graphe probabiliste à 2 ou 3 sommets.	Un état P est stable lorsque P=PM où M est la matrice de transition du graphe.	Pour déterminer P, poser P=(x y) puis résoudre le système : P = PM et $x + y = 1$.
Déterminer si une suite d'états probabilistes converge et trouver sa limite (dans le cas où il n'y a que deux états possibles)	Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition ne comporte pas de 0, l'état P_k à l'étape *k* converge vers un état P indépendant de l'état initial P_0. De plus, P vérifie P=PM.	