EXERCICE 3 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de $0,3$. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs.

La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à $0,9$ est :

a. 6 **b.** 7 **c.** 10 **d.** 12

2. On observe la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un moteur Diesel jusqu'à ce que survienne la première panne. Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire X définie sur $[0, +\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0002$. Ainsi, la probabilité que le moteur tombe en panne avant l'instant t est $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx$.

La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de $10\ 000$ heures est, au millième près :

a. $0,271$ **b.** $0,135$ **c.** $0,865$ **d.** $0,729$

3. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. A chaque lancer, il gagne s'il obtient $2, 3, 4, 5$ ou 6 ; il perd s'il obtient 1.
Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

a. $\dfrac{125}{3\ 888}$ **b.** $\dfrac{625}{648}$ **c.** $\dfrac{25}{7\ 776}$ **d.** $\dfrac{3}{5}$

4. Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers Ω tels que $p(A) = 0,3$ et $p(A \cup B) = 0,65$. La probabilité de l'événement B est :

a. $0,5$ **b.** $0,35$ **c.** $0,46$ **d.** $0,7$

EXERCICE 3

1. réponse b)

2. réponse b)

3. réponse a)

4. réponse a)

Explication 1. On note X le nombre de fois où le tireur atteint la cible en n tentatives. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le tireur atteint la cible » avec une probabilité $p = 0,3$ ou « le tireur n'atteint pas la cible » avec une probabilité $1 - p = 0,7$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,3$.

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$. Or,

$$p_n = p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}(0,3)^0(0,7)^n = 1 - (0,7)^n,$$

puis

$$\begin{aligned}
p_n \geqslant 0,9 &\Leftrightarrow 1 - (0,7)^n \geqslant 0,9 \Leftrightarrow (0,7)^n \leqslant 0,1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{10}\right)^n \leqslant \frac{1}{10} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{10}{7}\right)^n \geqslant 10 \text{ (car la fonction inverse est décroissante sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{10}{7}\right)^n\right) \geqslant \ln(10) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{10}{7}\right) \geqslant \ln(10) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(10)}{\ln\left(\frac{10}{7}\right)} \text{ (car } \frac{10}{7} > 1 \text{ et donc } \ln\left(\frac{10}{7}\right) > 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 6,4\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 7 \text{ (car } n \text{ est entier).}
\end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse b).

Explication 2. La probabilité demandée est $p(X \geqslant 10000)$.

$$\begin{aligned}
p(X \geqslant 10000) &= 1 - p(X \leqslant 10000) = 1 - \int_0^{10000} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{10000} = 1 - \left(1 - e^{-0,0002\times 10000}\right) \\
&= e^{-2} = 0,135 \text{ au millième près.}
\end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse b).

Explication 3. On note X le nombre de fois où le joueur perd en 5 lancers. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le joueur perd » avec une probabilité $p = \dfrac{1}{6}$ ou « le joueur gagne » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{5}{6}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{1}{6}$.

La probabilité demandée est $p(X = 3)$. Or,

$$p(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5\times 4\times 3}{3\times 2} \times \frac{5^2}{6^5} = \frac{10\times 5^2}{6^5} = \frac{5^3}{3\times 6^4} = \frac{125}{3888}.$$

La bonne réponse est la réponse a).

Explication 4. Puisque les événements A et B sont indépendants, $p(A\cap B) = p(A)\times p(B) = 0,3\,p(B)$. Ensuite,

$$p(A) + p(B) - P(A\cap B) = p(A\cup B) \Rightarrow 0,3 + p(B) - 0,3\,p(B) = 0,65 \Rightarrow 0,7\,p(B) = 0,35 \Rightarrow p(B) = \frac{0,35}{0,7} \Rightarrow p(B) = 0,5.$$

La bonne réponse est la réponse a).

