EXERCICE 4 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = -3$.

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
2. Placer les points A, B et C.
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3} i z^2$.

On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. a) Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.

   b) Placer les points A', B' et C'.

   c) Démontrer l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A'.

2. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G' le point associé à G par f.

   a) Déterminer les affixes des points G et G'.

   b) Le point G' est-il l'isobarycentre des points O', A', B' et C' ?

3. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole)

EXERCICE 4

Partie A

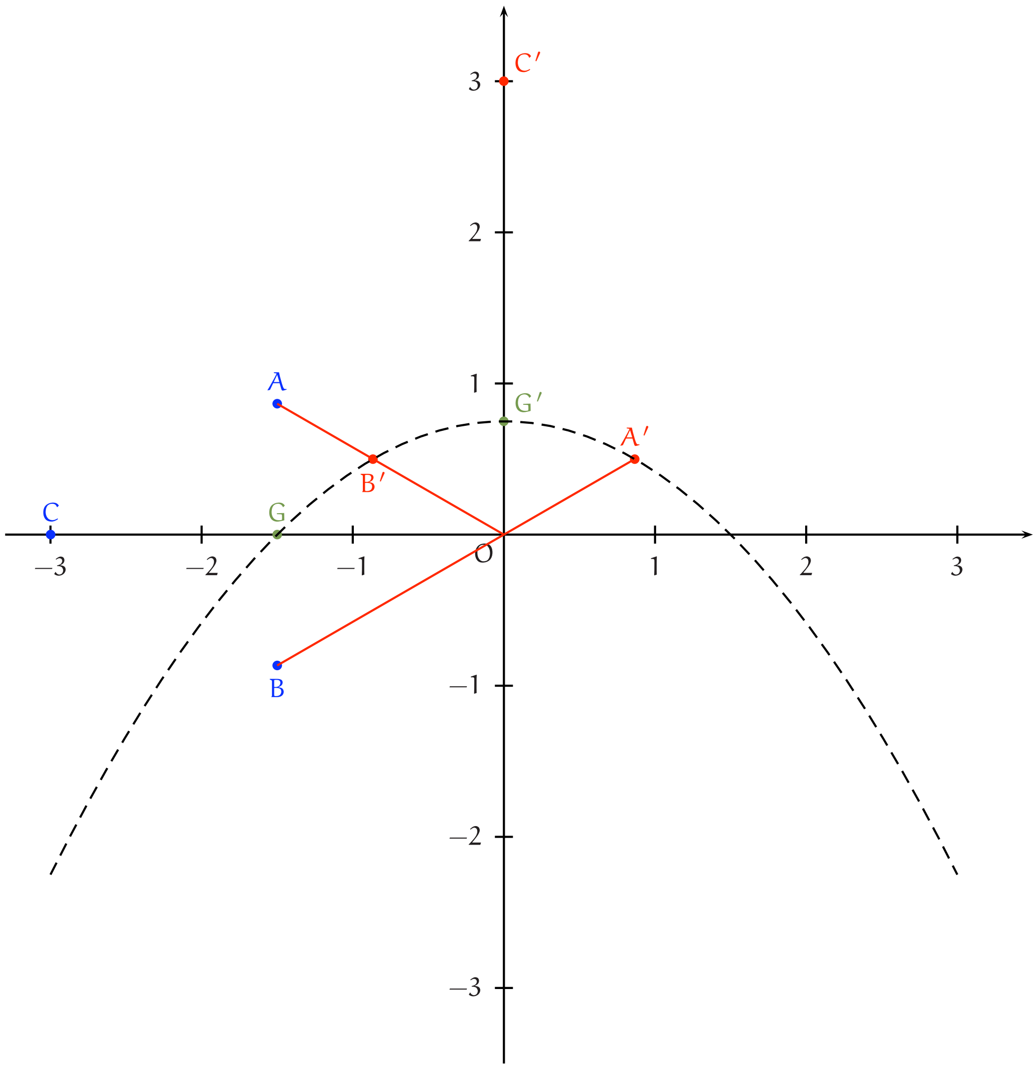
1) $z_A = \left|-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$ puis

$$z_A = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}e^{5i\pi/6}.$$

On sait d'autre part que $\overline{z_A}$ a le même module que z_A et un argument opposé à celui de z_A modulo 2π.
Donc $z_B = \overline{z_A} = \sqrt{3}e^{-5i\pi/6}$.

$$\boxed{z_A = \sqrt{3}e^{5i\pi/6} \text{ et } z_B = \sqrt{3}e^{-5i\pi/6}.}$$

2)



3) 1ère solution. • $AB = |z_B - z_A| = \left|\left(-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}|-i| = \sqrt{3}$.

• $AC = |z_c - z_A| = \left|-3 - \left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$.

$CB = |z_B - z_C| = |\overline{z_A} - \overline{z_C}| = |\overline{z_A - z_C}| = |z_A - z_C| = AC = \sqrt{3}$.

Donc $AB = AC = BC$ et le triangle ABC est équilatéral.

2ème solution.

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 3}{-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 3} = \frac{\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+i)}{\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}$$
$$= \frac{3 + 2i\sqrt{3} - 1}{3+1} = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\pi/3}.$$

Par suite, $\dfrac{CA}{CB} = \left|\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right| = |e^{i\pi/3}| = 1$ et $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \arg\left(\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \arg(e^{i\pi/3}) = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.
En résumé, $CA = CB$ et $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ et on a de nouveau montré que

$$\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est équilatéral.}}$$

Partie B

1) a) • $z'_A = \dfrac{1}{3}i\left(\sqrt{3}e^{5i\pi/6}\right)^2 = \dfrac{1}{3}i \times 3e^{2\times\frac{5i\pi}{6}} = ie^{5i\pi/3} = e^{i\pi/2} \times e^{5i\pi/3} = e^{i\pi/2} \times e^{-i\pi/3} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\pi/6}$.
• $z'_B = \dfrac{1}{3}i\left(\sqrt{3}e^{-5i\pi/6}\right)^2 = e^{i\pi/2}e^{-5i\pi/3} = e^{-7i\pi/6} = e^{5i\pi/6}$.
• $z'_C = \dfrac{1}{3}i(-3)^2 = 3i = 3\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 3e^{i\pi/2}$.

$$\boxed{z'_A = e^{i\pi/6},\ z'_B = e^{5i\pi/6} \text{ et } z'_C = 3e^{i\pi/2}.}$$

b) Voir figure.

c) $\dfrac{z_A - z_O}{z_{B'} - z_O} = \dfrac{\sqrt{3}e^{5i\pi/6}}{e^{5i\pi/6}} = \sqrt{3}$. Par suite, $\left(\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OA}\right) = \arg\left(\dfrac{z_A - z_O}{z_{B'} - z_O}\right) = 0$ (2π) et donc les points O, A et B' sont alignés.

$\dfrac{z_{A'} - z_O}{z_B - z_O} = \dfrac{e^{i\pi/6}}{\sqrt{3}e^{-5i\pi/6}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\pi} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Par suite, $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA'}\right) = \arg\left(\dfrac{z_A - z_O}{z_{B'} - z_O}\right) = \pi$ (2π) et donc les points O, B et A' sont alignés.

2) a) $z_G = \dfrac{z_O + z_A + z_B + z_C}{4} = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 3\right) = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$.

$z_{G'} = \dfrac{1}{3}i\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}i$.
b) L'affixe du barycentre des points $O' = O$, A', B' et C' est

$$\frac{z_{O'} + z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 3i\right) = i \neq z_{G'}.$$

Ainsi, le point G' n'est pas l'isobarycentre des points O', A', B' et C'.

3) Soit z un nombre complexe. On pose $z = a + ib$ où a et b sont deux réels.

$$z' = \frac{1}{3}i(a+ib)^2 = \frac{1}{3}i(a^2 + 2iab - b^2) = \frac{1}{3}(-2ab + i(a^2 - b^2)).$$

La droite (AB) est la droite d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$. Soit $M\left(-\dfrac{3}{2}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AB). Notons x et y les coordonnées de M'. D'après le calcul précédent

$$x = \frac{1}{3}\left(-2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times t\right) = t \text{ et } y = \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - t^2\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}t^2,$$

et donc $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{3}{4}$.

$$\boxed{\text{Si } M \text{ appartient à la droite } (AB) \text{ alors } M' \text{ appartient à la parabole d'équation } y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}.}$$

